Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática

Ejercicios de Álgebra Lineal.

Christian Fonseca Mora

2012

1. Prefacio

El objetivo de estas notas es ofrecer a los estudiantes del curso de Álgebra Lineal un complemento al material visto en clase y que les permita apropiarse de una serie de técnicas para la resolución de ejercicios. Como en todas las áreas de la matemática, la resolución de ejercicios es la mejor manera de comprender tanto los resultados teóricos, como la aplicabilidad del Álgebra Lineal y por lo tanto es indispensable que los estudiantes traten de resolver la mayor cantidad de ejercicios.

Usualmente no es posible cubrir el material del curso en el tiempo de clase y al mismo tiempo realizar la suficiente práctica para que los estudiantes identifiquen y dominen los distintos métodos utilizados en la resolución de ejercicios, los cuales en muchos casos requieren de una aplicación de los conceptos y resultados de la teoría. En esa dirección, escribí estas notas con ejercicios resueltos pensando en que los estudiantes pueden guiarse con las explicaciones y así realizar sus propias conclusiones sobre cómo solucionar un determinado ejercicio.

La recomendación a los estudiantes que utilicen estas notas es que primero intenten realizar el ejercicio por su cuenta y que cuando definitivamente no puedan hallar la solución, entonces recurran a las notas para identificar los fallos cometidos y cuál sería el método para encontrar la solución. Como es usual en la matemática, existen normalmente diversas maneras de solucionar un ejercicio, por lo que se ofrecen en estas notas sólo algunas de las posibilidades.

Los ejercicios fueron tomados de exámenes de semestres anteriores de la cátedra del curso MA1004 Álgebra Lineal de la Universidad de Costa Rica, especificamente entre los años 2009 a 2011. De ninguna manera la resolución de estos ejercicios pretende sustituir el estudio del material discutido en clase por el profesor, ni tampoco garantiza que el estudiante tenga un buen desempeño en los exámenes. Por tanto se recomienda al estudiante estudiar a conciencia el material del libro usado o las notas vistas en clase y complementarlo con estas notas. Cualquier error en este documento es responsabilidad del autor. Agradezco a mis estudiantes que en muchos casos me han permitido corregir errores de escritura, especialmente a mi estudiante Alejandra Zuñiga Carmiol que corrigió muchos de esos errores, aunque este documento puede no estar excento de muchos más.

Christian Fonseca.

Índice

2. Sistemas de Ecuaciones Lineales

1. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & 3p & -1 \\ -3 & p & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \end{pmatrix}$$

   a) Determine para que valores de p y de b el vector $\begin{pmatrix} b \\ 8 \\ b+7 \end{pmatrix}$ es solución del sistema.

   Respuesta:
   Para que el vector $(b, 8, b+7)^t$ sea solución del sistema, es necesario que:

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot b + 3p \cdot 8 - (b+7) & = & 17 \\ -3 \cdot b + p \cdot 8 - 7 \cdot (b+7) & = & 9 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} b + 24p - b - 7 & = & 17 \\ -3b + 8p - 7b - 49 & = & 9 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 24p & = & 24 \\ -10b + 8p & = & 58 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} p & = & 1 \\ -5b + 4p & = & 29 \end{array} \Leftrightarrow \quad p = 1 \quad y \quad b = -5$$

   b) En el sistema de ecuaciones dado, sustituya p por el valor que encontró en la parte (a) y determine el conjunto solución del sistema.

   Respuesta:
   Sustituyendo $p = 1$, se obtiene el sistema en forma de matriz aumentada dado por

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 17 \\ -3 & 1 & -7 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{3f_1 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & 10 & -10 & 60 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{10} f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-3f_2 + f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

   Entonces tenemos el sistema:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & +2x_3 & = & -1 \\ & x_2 & -x_3 & = & 6 \end{array}$$

   Tomando $x_3 = t$, se tiene $x_1 = -1 - 2t$ y $x_2 = 6 + t$. Por lo tanto, el conjunto solución del sistema es $\{(-1-2t, 6+t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

2. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcl} px_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ px_1 + px_2 + (p+1)x_3 & = & p \\ px_1 + px_2 + (2p-2)x_3 & = & 2p-2 \end{array}$$

   Determine para que valor o valores de p el sistema: (a) tiene infinitas soluciones, (b) tiene solución única, (c) no tiene solución.

   Respuesta:

Planteamos el sistema con matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 2 & 3 & 2 \\ p & p & (p+1) & p \\ p & p & (2p-2) & 2p-2 \end{array}\right) \underset{-f_1+f_3}{\xrightarrow{-f_1+f_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} p & 2 & 3 & 2 \\ 0 & p-2 & p-2 & p-2 \\ 0 & p-2 & 2p-5 & 2p-4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} p & 2 & 3 & 2 \\ 0 & p-2 & p-2 & p-2 \\ 0 & 0 & p-3 & p-2 \end{array}\right) = R$$

A partir de la matriz aumentada R presentamos los distintos casos de solución del sistema:

a) Tiene infinitas soluciones: Para esto, alguna fila debe de ser de ceros;

Si p=2, entonces

$$R = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3f_3+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}f_2}{\xrightarrow{-f_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \Leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces, $x_3 = 0$ y $x_1 = 1 - x_2$. Las soluciones son de la forma $\{(1-t, t, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

b) Solución única: en este caso se necesita entonces que no existan filas nulas, i.e. $Rng(A) = 3$,

Si $p \neq 0$, $p \neq 2$ y $p \neq 3$. Se tiene de la matriz R que,

$$R \underset{\substack{\frac{1}{p-2}f_2 \\ \frac{1}{p-3}f_3}}{\xrightarrow{\frac{1}{p}f_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{p} & \frac{3}{p} & \frac{2}{p} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{p-2}{p-3} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-2}{p}f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{p-2}{p-3} \end{array}\right)$$

$$\underset{-f_3+f_2}{\xrightarrow{\frac{-1}{p}f_3+f_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{p}\left(\frac{p-2}{p-3}\right) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{p-3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{p-2}{p-3} \end{array}\right)$$

La solución única es $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-1}{p}\left(\frac{p-2}{p-3}\right), \frac{-1}{p-3}, \frac{p-2}{p-3}\right)$.

c) No tiene solución: en este caso se tiene la presencia de filas inconsistentes;

Si $p = 0$

$$R = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{-1}{3}f_3]{\frac{-1}{2}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\underset{-f_3+f_2}{\xrightarrow{\frac{1}{2}f_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-3}{2}f_3+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Por lo tanto el sistema tiene una ecuación inconsistente y no hay solución.

Si $p = 3$

$$R = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Entonces el sistema tiene una ecuación inconsistente.

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 & = & -2 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 & = & -3 \\ px_1 + px_2 + 2px_3 + (p^2 + 4p)x_4 & = & 1 \end{array}$$

a) Determine para qué valor o valores de p el sistema tiene infinitas soluciones con un parámetro.

Respuesta:
Planteamos la matriz aumentada. Tome, $p \neq 0$, entonces

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 5 & -3 \\ p & p & 2p & (p^2+4p) & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -f_1 + f_2 \\ \longrightarrow \\ -pf_1 + f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -p & -2p & p^2 & 1+2p \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -2f_2 + f_1 \\ \longrightarrow \\ pf_2 + f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & p(p+1) & (p+1) \end{array}\right) = R$$

Como el sistema tiene menos ecuaciones que variables, entonces si tiene solución, las soluciones son infinitas. Entonces para que el sistema sea consistente, con soluciones infinitas dependiendo de un parámetro, es necesario que hayan 3 filas no nulas en la matriz, es decir, que $p \neq -1$.
Si $p = 0$, entonces del sistema original,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En este caso el sistema es inconsistente.

b) Resuelva el sistema para este caso (es decir, cuando tiene infinitas soluciones con un parámetro).

Respuesta:
Si $p \neq 0$ y $p \neq -1$, partiendo de la matriz R,

$$R \xrightarrow{\frac{1}{p(p+1)}f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{p} \end{array}\right) \begin{array}{c} -f_3 + f_2 \\ \longrightarrow \\ -2f_3 + f_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{p} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{-(p+1)}{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{p} \end{array}\right)$$

De donde se obtiene el sistema equivalente, $x_1 = \frac{-2}{p}$, $x_2 = \frac{-(p+1)}{p} - 2x_3$ y $x_4 = \frac{1}{p}$. Entonces el conjunto de soluciones del sistema es $\left\{\left(\frac{-2}{p}, \frac{-(p+1)}{p} - 2t, t, \frac{1}{p} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right)\right\}$

4. Para la siguiente matriz aumentada que corresponde a un sistema de ecuaciones lineales:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & c \\ 0 & 0 & c & 0 \end{array}\right)$$

a) Determine cuáles son los valores de a, b y c de tal forma que el rango de la matriz aumentada del sistema sea 1.

Respuesta:
Para que el $Rango(A) = 1$, se necesita que sólamente una fila de A sea no nula. Tome $a = 2$, $b = -1$ y $c = 0$, con lo que sólo la primera fila no es nula.

b) Determine cuáles son los valores de a, b y c de tal forma que el rango de la matriz aumentada del sistema sea 2.

Respuesta:
Para que $Rango(A) = 2$, es necesario que dos filas de A no sean nulas. Se requiere entonces primero que $c = 0$, y se presentan 2 posibilidades:

1) $a = 2$ y $b \neq -1$. Las filas nulas son la 2 y 4.
2) $b = -1$ y $a \neq 2$ Las filas nulas son la 3 y 4.

c) Determine cuáles son los valores de a, b y c de tal forma que el rango de la matriz aumentada del sistema sea 3.

Respuesta:
Como la matriz A tiene 4 filas, para que el $Rango(a) = 3$ es necesario que sólamente una fila de A sea nula. Para que esto suceda, se necesita $a \neq 2$, $b \neq -1$ y $c = 0$.

d) Determine cuáles son los valores de a, b y c de tal forma que el sistema no tenga solución.

Respuesta:
Para que tenga ecuaciones inconsistentes una fila de A debe ser nula del lado de los coeficientes y no nula del lado aumentado. La única fila con esta posibilidad es la tercera. De modo que es necesario que $b = -1$ y $c \neq 0$, con $a \in \mathbb{R}$.

e) Determine el conjunto solución del sistema cuando tiene solución única.

Respuesta:
Para que el sistema tenga solución única, como se tienen 3 variables (3 columnas en la parte de coeficientes de A), entonces se necesita $Rango(A) = 3$. Entonces si $a \neq 2$, $b \neq -1$ y $c = 0$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{b+1}f_3]{\frac{1}{a-2}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La solución única es $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

5. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ 2x+py+2z & = & -2 \\ 4x+2py+4z & = & m \end{array}$$

a) Determine para cuáles valores de p y m el sistema tiene infinitas soluciones dependiendo de un parámetro.

Respuesta:
Planteamos el sistema con matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & p & 2 & -2 \\ 4 & 2p & 4 & m \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & p & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & m+4 \end{array}\right) = R$$

Note que si $m \neq -4$, el sistema tiene una ecuación inconsistente, y por tanto no tiene solución.

Si $p = 2$ y $m = -4$, entonces

$$R = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema tiene entonces una ecuación inconsistente, de modo que $p \neq 2$.
Si $p \neq 2$ y $m = -4$, entonces,

$$R = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & p & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & p-2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = B$$

Y se tiene entonces que $Rng(A) = 2$.
Por consiguiente, el sistema tiene soluciones infinitas dependiendo de un parámetro si $p \neq 2$ y $m = -4$.

b) Con los valores de p y m encontrados en a), resuelva el sistema cuando tiene infinitas soluciones dependiendo de un parámetro.

Respuesta:
Por la parte a), si $p \neq -2$ y $m = -4$.

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & p-2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{p-2}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{p-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{p+2}{p-2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{p-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se tiene entonces el sistema $x_1 = \frac{p+2}{p-2} - x_3$ y $x_2 = \frac{-4}{p-2}$. Por tanto, el conjunto solución es $\left\{\left(\frac{p+2}{p-2} - t, \frac{-4}{p-2}, t\right) \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$.

6. Para la siguiente matriz aumentada que corresponde a un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{array}\right)$$

a) Encuentre una ecuación que contenta a los valores reales g, h, k de tal manera que la matriz aumentada anterior corresponda a un sistema consistente.

Respuesta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{array}\right) \xrightarrow{2f_1+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & -3 & 5 & k+2g \end{array}\right) \xrightarrow{f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & \frac{h}{3} \\ 0 & 0 & 0 & h+k+2g \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{h}{3} \\ 0 & 0 & 0 & h+k+2g \end{array}\right) \xrightarrow{4f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{3g+4h}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{3} & \frac{h}{3} \\ 0 & 0 & 0 & h+k+2g \end{array}\right) = R$$

Para que el sistema sea consistente, entonces h, k y g deben de satisfacer la ecuación $0 = h+k+2g$.

b) Determine el conjunto solución del sistema consistente correspondiente a la matriz aumentada anterior.

Respuesta:
Por la parte a), si se cumple que $h+k+2g=0$, entonces la matriz R corresponde al sistema: $x_1 = \frac{3g+4h}{3} - \frac{1}{3}x_3$, $x_2 = \frac{h}{3} + \frac{5}{3}x_3$. El conjunto solución es entonces: $\left\{\left(\frac{3g+4h}{3} - \frac{1}{3}t, \frac{h}{3} + \frac{5}{3}t, t\right) \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$.

7. Dado el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcl} 2x + ky + z + w & = & 0 \\ 3x + (k-1)y - 2z - w & = & 0 \\ x - 2y + 4z + 2w & = & 0 \\ 2x + y + z + 2w & = & 0 \end{array}$$

Determine los valores reales de k para los cuales el sistema de ecuaciones anterior tiene soluciones distintas de la trivial, es decir, diferentes a $(0,0,0,0)$.

Respuesta:

Planteamos el sistema con matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & k & 1 & 1 \\ 3 & k-1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \Leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & k-1 & -2 & -1 \\ 2 & k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -2f_1+f_3 \\ \longrightarrow \\ -3f_1+f_2 \\ -2f_1+f_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & k+5 & -14 & -7 \\ 0 & k+4 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-f_2+f_3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & k+5 & -14 & -7 \\ 0 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & -7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & k+5 & -14 & -7 \\ 0 & 1 & -7 & -4 \\ 0 & 5 & -7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[2f_3+f_1]{-f_4+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & -6 \\ 0 & k & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -7 & -4 \\ 0 & 5 & -7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-5f_3+f_4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & -6 \\ 0 & k & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 28 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{28}f_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & -6 \\ 0 & k & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{7f_4+f_2\\7f_4+f_3}]{10f_4+f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & k & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{pmatrix} = R$$

Si $k = 0$, entonces,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{pmatrix} \xrightarrow{-2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{-1}{2}f_2+f_3\\ \frac{-9}{14}f_2+f_4}]{\frac{-3}{7}f_2+f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si $k = 0$ el sistema sólamente tiene la solución trivial.

Ahora, si $k \neq 0$,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & k & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{pmatrix} \xrightarrow{-kf_3+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{pmatrix} = S$$

Si $k = -1$, la matriz S tiene 3 filas no nulas, y por tanto el sistema tiene infinitas soluciones. Por otra parte, si $k \neq -1$,

$$S \xrightarrow{\frac{-2}{(k+1)}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{-1}{2}f_2+f_3\\ \frac{-9}{14}f_2+f_4}]{\frac{-3}{7}f_2+f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De modo que si $k \neq 0$ y $k \neq -1$, entonces la solución es única. Se concluye que el valor $k = -1$ es el que produce soluciones distintas a la trivial.

8. Considere el sistema de ecuaciones lineales que se da a continuación

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 3 \\ bx + by + z & = & a + 4b \\ ax + ay & = & 4a \\ bx + by - z & = & b \end{array}$$

Determine todos los valores de a y de b para los cuales el sistema es consistente. Determine el conjunto solución del sistema en los casos en que es consistente.

Respuesta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ b & b & 1 & a+4b \\ a & a & 0 & 4a \\ b & b & -1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{-f_2+f_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ b & b & 1 & a+4b \\ a & a & 0 & 4a \\ 0 & 0 & -2 & -a-3b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{2}f_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ b & b & 1 & a+4b \\ a & a & 0 & 4a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+3b}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{-f_4+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ b & b & 0 & \frac{a+5b}{2} \\ a & a & 0 & 4a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+3b}{2} \end{array}\right) = B$$

Si $a = 0$,

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ b & b & 0 & \frac{5b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3b}{2} \end{array}\right) = C$$

Si $b = 0$,

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces, $Rng(A) = 2$ y el sistema tiene soluciones infinitas $S = \{(3-t, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Si $b \neq 0$

$$C \xrightarrow{\frac{1}{b}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3b}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3b}{2} \end{array}\right)$$

En este caso el sistema no tiene solución porque tiene una ecuación inconsistente.

Si $a \neq 0$,

$$A \xrightarrow{\frac{1}{a}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ b & b & 0 & \frac{a+5b}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+3b}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ b & b & 0 & \frac{a+5b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+3b}{2} \end{array}\right)$$

Entonces el sistema tiene una ecuación inconsistente y por tanto no tiene solución si $a \neq 0$ para cualquier valor de $b \in \mathbb{R}$.

En resúmen, se concluye que:

a) El sistema es inconsistente si

1) $a \neq 0, \forall b \in \mathbb{R}$.
2) $a = 0, b \neq 0$.

b) El sistema es consistente si $a = 0$,$b = 0$ y la solución es $S = \{(3-t, t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

9. Considere el sistema de ecuaciones lineales que se da a continuación

$$\begin{array}{rcc} ax + ay + 2aw & = & 0 \\ x + 2y + 3w & = & -1 \\ x + 2y + z + 3w & = & a - b - 1 \\ x + 2y + 3w & = & a^2 + b^2 - 1 \end{array}$$

a) Determine todos los valores de a y de b para los cuales el sistema es inconsistente.

Respuesta:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & a & 0 & 2a & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & a-b-1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & a^2+b^2-1 \end{array}\right) \underset{-f_2+f_4}{\overset{-f_2+f_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} a & a & 0 & 2a & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{array}\right) = B$$

Para que el sistema sea consistente es necesario que $a^2 + b^2 = 0$ lo que se da si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$ ya que $a^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$ y $a^2 > 0$ si $a \neq 0$ y $b^2 > 0$ si $b \neq 0$.

Entonces el sistema es inconsistente si alguno de los dos, a o b es distinto de cero, i.e. si ocurre alguno de los casos:

1) $a \neq 0, \forall b \in \mathbb{R}$.
2) $b \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}$.

b) Determine el conjunto solución del sistema en los casos en que es consistente.

Respuesta:
El sistema es consistente si $a = b = 0$, entonces, sustituyendo en B

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces $x = -1 - 2y - 3w$ y $z = 0$, por tanto $S = \{(-1-2t-3s, t, 0, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$.

3. Matrices

1. Se dan las matrices cuadradas, del mismo orden, A, B, C y X con A y B invertibles, tales que $(AXB)^t + C = I$ (donde I es la matriz identidad).

   a) Use las operaciones con matrices y sus propiedades para despejar X en términos de las matrices I, A, B y C (no use sistemas de ecuaciones).

   Respuesta:

$$\begin{array}{cll}
 & (AXB)^t + C = I & \\
\Leftrightarrow & [(AXB)^t + C]^t = I^t & \text{(aplicamos transpuestas)} \\
\Leftrightarrow & [(AXB)^t]^t + C^t = I & \text{(propiedad transpuesta de la suma)} \\
\Leftrightarrow & AXB + C^t = I & \text{(propiedad transpuesta de la transpuesta)} \\
\Leftrightarrow & A^{-1} \cdot [AXB + \cdot C^t] = A^{-1} \cdot I & \text{(multiplicando por } A^{-1}\text{)} \\
\Leftrightarrow & A^{-1} \cdot AXB + A^{-1} \cdot C^t = A^{-1} \cdot I & \text{(propiedad de distributividad)} \\
\Leftrightarrow & XB + A^{-1} \cdot C^t = A^{-1} & \text{(definición de inversa)} \\
\Leftrightarrow & XB = A^{-1} \cdot [I - C^t] & \text{(distributividad del producto en suma)} \\
\Leftrightarrow & XB \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot [I - C^t] \cdot B^{-1} & \text{(multiplicando por } B^{-1}\text{)} \\
\Leftrightarrow & X = A^{-1} \cdot [I - C^t] \cdot B^{-1} & \text{(definición de inversa)}
\end{array}$$

   b) Según lo que se obtuvo en (a), determine X si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   Respuesta:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2f_2 + f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \Leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_2 + f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   Entonces,

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 11 & -18 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Se dan las matrices cuadradas, del mismo orden, A, B y X con $A - B$ invertible, tales que $XA^t = I + (BX^t)^t$ (donde I es la matriz identidad).

a) Use las operaciones con matrices y sus propiedades para despejar X en términos de las matrices I, A y B (no use sistemas de ecuaciones).

Respuesta:

$$\begin{array}{rcl}
 & XA^t = I + (BX^t)^t & \\
\Leftrightarrow & XA^t = I + (X^t)^t B^t & \text{(transpuesta de un producto)} \\
\Leftrightarrow & XA^t = I + XB^t & \text{(transpuesta de una matriz transpuesta)} \\
\Leftrightarrow & XA^t - XB^t = I & \text{(restando } XB^t \text{ a ambos lados de la igualdad)} \\
\Leftrightarrow & X \cdot (A^t - B^t) = I & \text{(distributividad del producto sobre la resta)} \\
\Leftrightarrow & X \cdot (A - B)^t = I & \text{(distributividad del producto en resta)} \\
\Leftrightarrow & (X \cdot (A - B)^t)^t = I^t & \text{(aplicando transpuestas)} \\
\Leftrightarrow & (A - B) \cdot X^t = I & \text{(transpuesta de un producto} \\
\Leftrightarrow & (A - B)^{-1} \cdot (A - B) \cdot X^t = (A - B)^{-1} \cdot I & \text{(multiplicando por } (A - B)^{-1}) \\
\Leftrightarrow & X^t = (A - B)^{-1} \cdot I & \text{(aplicando definición de inversa)} \\
\Leftrightarrow & X = [(A - B)^{-1}]^t & \text{(aplicando transpuesta a ambos lados)}
\end{array}$$

b) Según lo que obtuvo en la parte a), determine X si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Respuesta:
Se tiene $A - B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ Para obtener X necesitamos determinar la inversa de $A - B$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2f_2 + f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-4f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 & -7 \end{array}\right)$$

$$\underset{-f_2}{\xrightarrow{-f_1}} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \Leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

De modo que

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Sea $S = \{1, 1, k), \ (k, 1, 1), \ (k, k, 4)\}$

a) Determine para qué valor o valores de k el conjunto de vectores S es linealmente independiente.

Respuesta:
Sean $v_1 = (1, 1, k)$, $v_2 = (k, 1, 1)$, $v_3 = (k, k, 4)$. Los vectores de S forman un conjunto linealmente independiente (li) si

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0 \ \Rightarrow \ (c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$$

Lo anterior, es equivalente a que la única solución al sistema $Ax = 0$ sea $x = 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} v_1^t, & v_2^t, & v_3^t \end{pmatrix} \qquad x = (c_1, c_2, c_3)^t$$

Entonces, resolvemos el sistema homogéneo haciendo casos sobre k.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{-f_1+f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1-k & 0 \\ k & 1 & 4 \end{pmatrix} = B$$

Si $k = 0$, entonces

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{-f_2+f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{4}f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, si $k = 0$ se tiene $x = 0$ y los vectores de S son li.

Si $k \neq 0$, se tiene,

$$B \overset{-kf_1+f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 4-k^2 \end{pmatrix} \overset{f_2+f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 4-k^2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-kf_2+f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 4-k^2 \end{pmatrix} \overset{-f_2+f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 4-k^2 \end{pmatrix} = C$$

Si $k = 1$, entonces,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{3}f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-f_3+f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_2 \Leftrightarrow f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, como el Rango(A) es 2, hay infinitas soluciones dependiendo de un parámetro. El RangoFila(A) es 2, entonces a lo sumo hay 2 vectores li.

Si $k \neq 1$, se tiene $1 - k \neq 0$, y se sigue que

$$C \overset{\frac{1}{1-k}f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k^2 \end{pmatrix} \overset{-f_2+f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k^2 \end{pmatrix} = D$$

Si $k = 2$, se tiene,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, como el Rango(A) es 2, hay infinitas soluciones dependiendo de un parámetro. El RangoFila(A) es 2, entonces a lo sumo hay 2 vectores li.

Si $k \neq 2$, es decir, si $2-k \neq 0$, se tiene

$$D \xrightarrow{\frac{1}{2-k}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+k \end{pmatrix} = E$$

Si $k=-2$, se tiene,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, como el Rango(A) es 2, hay infinitas soluciones dependiendo de un parámetro. El RangoFila(A) es 2, entonces a lo sumo hay 2 vectores li.

Si $k \neq -2$, es decir, si $2+k \neq 0$, se tiene

$$E \xrightarrow{\frac{1}{2+k}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-kf_3+f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, $x=0$ y los vectores de S son li.

Se concluye que los vectores de S son li si $k \in \mathbb{R}$ y $k \notin \{-2, 1, 2\}$.

b) ¿Para qué valor o valores de k el conjunto S contiene a lo sumo dos vectores linealmente independientes? (Justifique)

Respuesta:
Por el desarrollo de la parte a), se concluye que el conjunto S tiene a lo sumo 2 vectores li si $k \in \{-2, 1, 2\}$.

4. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Determine la siguiente matriz $(AB - I_2)^{-1}$, si existe.

Respuesta:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad AB - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Entonces, calculamos su inversa,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_2+f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{4}f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} \end{array}\right) \xrightarrow{-f_2+f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} \end{array}\right)$$

Entonces, $(AB - I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$.

b) Utilice sólamente álgebra de matrices para encontrar una matriz X tal que $\left(A^t X\right)^t B - I_2 = X^t$.

Respuesta:

$$
\begin{array}{cll}
 & \left(A^t X\right)^t B - I_2 = X^t & \\
\Leftrightarrow & X^t \left(A^t\right)^t B - I_2 = X^t & \text{(transpuesta de un producto)} \\
\Leftrightarrow & X^t AB - X^t = I_2 & \text{(transpuesta de una matriz transpuesta)} \\
\Leftrightarrow & X^t (AB - I_2) = I_2 & \text{(distributividad del producto sobre la suma)} \\
\Leftrightarrow & X^t (AB - I_2) \cdot (AB - I_2)^{-1} = I_2 \cdot (AB - I_2)^{-1} & \text{(multiplicando por } (AB - I_2)^{-1}\text{)} \\
\Leftrightarrow & X^t = (AB - I_2)^{-1} & \text{(por definición de inversa)} \\
\Leftrightarrow & X = \left\{(AB - I_2)^{-1}\right\}^t & \text{(aplicando transpuestas)}
\end{array}
$$

Entonces por lo calculado en la parte a), $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$.

5. ¿Para cuáles valores de a, si existen, el conjunto $\left\{(1, a, 0, 0)^t, (1, -3, a+1, 0)^t, (0, 1, -4, 0)^t\right\}$ es linealmente independiente?

Respuesta:

Sea

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -3 & 1 \\ 0 & a+1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Las columnas de A son el conjunto de vectores de S, por lo que por teorema, el conjunto S es l.i. si y sólo si la única solución al sistema homogéneo $Ax = 0$ es $x = 0$

Entonces, resolvemos el sistema homogéneo haciendo casos sobre a.

Si $a = 0$,

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{-f_3 + f_1}{\overset{3f_3 + f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\overset{\frac{-1}{11} f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{-4f_2 + f_1}{\overset{4f_2 + f_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{f_2 \Leftrightarrow f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Entonces, si $a = 0$ la única solución al sistema es $x = 0$, por lo tanto en este caso el conjunto S es l.i.

Si $a \neq 0$, entonces

$$A \xrightarrow{-af_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3-a & 1 \\ 0 & a+1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -(3+a) & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{2}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -(3+a) & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{-f_3+f_1}{\xrightarrow{3f_3+f_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & -a & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{af_3+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(3a+11) \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Si $3a+11=0 \Leftrightarrow a=\frac{-11}{3}$, entonces $Rng(A)=2$ y por lo tanto existe una solución distinta a la trivial, de modo que S no es l.i.

Por otra parte, si $a \neq \frac{-11}{3}$,

$$B \xrightarrow{\frac{2}{3a+11}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\frac{-3}{2}f_2+f_3}{\xrightarrow{\frac{3}{2}f_2+f_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \Leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $x=0$ es la única solución. Los vectores de S son l.i. si $a \neq \frac{-11}{3}$.

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Determine el rango de A.

   Respuesta:
   Para determinar $Rng(A)$ necesitamos encontrar la forma escalonada reducida de A.

$$A \underset{-f_2}{\xrightarrow{-2f_1+f_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Entonces $Rng(A)=2$, puesto que la forma escalonada reducida equivalente por filas a A tiene sólamente dos filas no nulas.

   b) Escriba el vector que corresponde a la tercera columna de A como combinación lineal de los vectores que corresponden a las otras dos columnas de A.

   Respuesta:
   En este caso, se plantea el sistema con matriz aumentada, donde la solución al sistema son los escalares que permiten escribir a la columna 3 como combinación lineal de las columnas 1 y 2 de A. Se tiene, por la parte a) que,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces, se concluye que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) Sin hacer cálculos adicionales, diga si las tres filas de A corresponden a vectores linealmente independientes o a vectores linealmente dependientes. Justifique su respuesta.

Respuesta:
Como $Rng(A) = 2$, y A es de $3x3$, entonces $Rng(A) < 3$ y por lo tanto, las filas de A no pueden ser linealmente independientes, i.e son linealmente dependientes.

d) Sin hacer cálculos adicionales, diga si el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, donde $X = (x, y, z)^t$ y $B = (1, 2, 3)^t$ tiene solución única. Justifique su respuesta.

Respuesta:
No tiene solución única ya que $Rng(A) < 3$, y por tanto las soluciones son infinitas. De hecho dependen de 1 parámetro ya que $Rng(A) = 2$.

7. Sea A una matriz de orden mxm y B es una matriz de orden mxn.

a) ¿De qué orden deben de ser las matrices X y D, de modo que la igualdad, $XA^t - B^t = XD^t$ tenga sentido.

Respuesta:
Como A^t es de orden mxm, entonces para que el producto XA^t tenga sentido, X debe tener m columnas. Por otra parte, como B^t es de nxm, entonces para que la resta tenga sentido, XA^t debe tener n filas, por tanto, X es de nxm.

Por el orden de A^t, B^t y X, se sigue que $XA^t - B^t$ es de nxm, entonces XD^t es de nxm, y XD^t es de orden nxm. Se sigue que D^t tiene m columnas, y como X tiene m columnas, entonces D^t tiene m filas para que el producto matricial tenga sentido. De modo que D^t es de orden mxm, y D es de orden mxm también.

b) Para que la igualdad dada anteriormente en a) tenga sentido y $(A - D)^t$ sea invertible, utilice las operaciones con matrices y sus propiedades para despejar X en términos de A, B y D.

Respuesta:

$$\begin{array}{lcl}
 & XA^t - B^t = XD^t & \\
\Leftrightarrow & X\left(A^t - D^t\right) = B^t & \text{(distributividad de producto sobre resta)} \\
\Leftrightarrow & X(A-D)^t = B^t & \text{(transpuesta de una matriz transpuesta)} \\
\Leftrightarrow & X(A-D)^t \cdot \left\{(A-D)^t\right\}^{-1} = B^t \cdot \left\{(A-D)^t\right\}^{-1} & \left(\text{multiplicando por } \left\{(A-D)^t\right\}^{-1}\right) \\
\Leftrightarrow & X = B^t \cdot \left\{(A-D)^t\right\}^{-1} & \text{(definición de inversa)}
\end{array}$$

c) Según lo que obtuvo anteriormente en b), calcule X si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Respuesta:

$$A - D = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (A-D)^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la inversa de $(A-D)^t$,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{4}f_2]{\frac{-1}{3}f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{4}f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{12} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{f_1 \Leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-1}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{(A-D)^t\right\}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

8. Dada la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Compruebe que $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Respuesta:

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcule P^3.

Respuesta:

$$P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Calcule P^4.

Respuesta:

$$P^4 = P^3 \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Obtenga una fórmula para calcular P^n, donde $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$.

Respuesta:

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & n & S_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donde } S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n$$

9. Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Determine el Rango de la matriz A.

Respuesta:
Para determinar $Rng(A)$ necesitamos encontrar la forma escalonada reducida equivalente por filas a A:

$$A \underset{-2f_2+f_1}{\overset{-3f_2+f_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & -6 & -11 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & -12 & -22 \end{pmatrix} \overset{-2f_1+f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -6 & -11 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\frac{1}{2}f_2}{\overset{\frac{-1}{6}f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{11}{6} \\ 1 & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{-3}{2}f_1+f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{11}{6} \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{f_1 \Leftrightarrow f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la forma escalonada reducida de A tiene sólamente dos filas no nulas, entonces $Rng(A) = 2$.

b) Sin hacer cálculos adicionales, diga si la matriz A es invertible. Justifique su respuesta.

Respuesta:
Por teorema, la matriz A no es invertible pues es una matriz de $3x3$ tal que $Rng(A) < 3$. Note además que no es equivalente por filas a la matriz identidad I_3.

c) Sin hacer cálculos adicionales, diga si los tres vectores que corresponden a las tres columnas de la matriz A son linealmente independientes o linealmente dependientes. Justifique su respuesta.

Respuesta:
Como A no es invertible, por teorema sus columnas son linealmente dependientes.

d) Escriba el vector que corresponde a la tercera columna de la matriz A como una combinación lineal de los dos vectores que corresponden a las otras dos columnas de A.

Respuesta:
Se plantea el sistema con matriz aumentada, donde la solución al sistema son los escalares que permiten escribir a la columna 3 como combinación lineal de las columnas 1 y 2 de A. Se tiene, por la parte a) que,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & -3 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces, se concluye que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{11}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

10. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad I_3 de $M(3, \mathbb{R})$.

a) Efectúe las operaciones para obtener la matriz C tal que $C = A^2 + A - 3I_3$.

Respuesta:
Primeramente calculamos la matriz A^2,

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz C está dada por;

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Efectúe las operaciones para obtener la matriz D tal que $D = -B^2 + B + 5I_3$.

Respuesta:
Primeramente calculamos la matriz B^2,

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz D está dada por;

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & -4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Calcule BD y diga que relación existe entre la matriz D y la matriz B.

Respuesta:

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, $D = B^{-1}$ o bien $B = D^{-1}$.

11. Determine si cada uno de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o linealmente independientes.

a) $\left\{(2,-1,4)^t, (3,6,2)^t, (2,10,-4)^t\right\}$

Respuesta:
Para determinar si un conjunto de vectores son linealmente independientes (l.i.) o linealmente dependientes (l.d.) basta con colocar dichos vectores como las columnas de una matriz y determinar si la forma escalonada reducida equivalente por filas a esa matriz es o no la identidad. Se tiene entonces,

$$A \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{4f_2+f_3}{\overset{2f_2+f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 15 & 22 \\ -1 & 6 & 10 \\ 0 & 26 & 36 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{26}f_3}{\overset{-f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 15 & 22 \\ 1 & -6 & -10 \\ 0 & 1 & \frac{18}{13} \end{pmatrix}$$

$$\underset{6f_3+f_2}{\overset{-15f_3+f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{16}{13} \\ 1 & 0 & \frac{-22}{13} \\ 0 & 1 & \frac{18}{13} \end{pmatrix} \overset{\frac{13}{16}f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-22}{13} \\ 0 & 1 & \frac{18}{13} \end{pmatrix} \underset{\frac{-18}{13}f_1+f_3}{\overset{\frac{22}{13}f_1+f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{f_1 \Leftrightarrow f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_1 \Leftrightarrow f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto como la forma escalonada reducida de A es la identidad I_3, entonces el conjunto de vectores es l.i.

b) $\left\{(1,-2,3)^t, (5,6,-1)^t, (3,2,1)^t\right\}$

Respuesta:
Procedemos de la misma manera que en la parte a),

$$B \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{-3f_1+f_3}{\overset{2f_1+f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & -16 & -8 \end{pmatrix} \overset{f_2+f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{16}f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-5f_2+f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la forma escalonada reducida de B no es la identidad, entonces los vectores son l.d.

12. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, y $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (20 puntos) Encuentre la matriz B que satisface la siguiente ecuación: $A\left(B^t + C\right) = D$.

   Respuesta:

   Utilizamos operaciones de matrices para depejar la matriz B de la ecuación $A\left(B^t + C\right) = D$. Primero antes note que A es una matriz invertible ya que, $det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3 \neq 0$. En lo anterior cálculo del determinante se usó la propiedad para matrices triangulares. Procedemos entonces a depejar B,

$$
\begin{array}{rll}
 & A\left(B^t + C\right) = D & \\
\Leftrightarrow & A^{-1} \cdot A\left(B^t + C\right) = A^{-1} \cdot D & \text{(multiplicando por } A^{-1}\text{)} \\
\Leftrightarrow & B^t + C = A^{-1}D & \text{(definición de inversa y producto por identidad)} \\
\Leftrightarrow & B^t = A^{-1}D - C & \text{(restando la matriz } C\text{)} \\
\Leftrightarrow & \left(B^t\right)^t = \left(A^{-1}D - C\right)^t & \text{(aplicando transpuestas)} \\
\Leftrightarrow & B = \left(A^{-1}D - C\right)^t & \text{(transpuesta de una matriz transpuesta)}
\end{array}
$$

   Por la fórmula anterior para B, entonces necesitamos calcular la matriz $A^{-1}D - C$. Empezando por A^{-1}, se tiene,

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\begin{array}{c} f_2 + f_1 \\ \longrightarrow \\ \frac{1}{3}f_3 \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)
\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
$$

   Entonces,

$$
A^{-1}D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
A^{-1}D - C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -4 \\ \frac{1}{3} & -4 \end{pmatrix}
$$

   Entonces, $B = \left(A^{-1}D - C\right)^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

13. Determine los valores reales de λ de tal forma que los vectores del siguiente conjunto sean linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$:

$$
W = \left\{\left(\lambda, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}, \lambda, \frac{-1}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \lambda\right)\right\}
$$

Respuesta:

Sea A la matriz cuyas columnas son los vectores de W, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \lambda & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \lambda \end{pmatrix}$$

Entonces, las columnas de A son linealmente dependientes (l.d.) si y sólo si, A no es equivalente por filas a la matriz identidad I_3. Vamos a analizar las formas escalonadas reducidas equivalentes por filas a A según los valores de λ.

$$A \overset{-f_2+f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \lambda & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \lambda & \frac{-1}{2} \\ 0 & -\left(\frac{1}{2}+\lambda\right) & \left(\frac{1}{2}+\lambda\right) \end{pmatrix} \overset{-f_1+f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \lambda & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -\left(\frac{1}{2}+\lambda\right) & \left(\frac{1}{2}+\lambda\right) & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{2}+\lambda\right) & \left(\frac{1}{2}+\lambda\right) \end{pmatrix} = B$$

Por tanto, si sustituimos $\lambda = \frac{-1}{2}$ en B, entonces,

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-2f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y entonces si $\lambda = \frac{-1}{2}$, A no es equivalente por filas a la identidad, y el conjunto W es l.d.

Ahora, si $\lambda \neq \frac{-1}{2}$, en B tenemos,

$$B \underset{\frac{1}{\frac{1}{2}+\lambda}f_3}{\overset{\frac{1}{\frac{1}{2}+\lambda}f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} \lambda & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{-1}{2}f_3+f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = C$$

Si $\lambda = 0$, sustituyendo en la matriz C, se tiene,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{-f_2}{\overset{f_1+f_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{-f_1}{\overset{-f_3+f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{-f_3}{\overset{f_1 \Leftrightarrow f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{f_2 \Leftrightarrow f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si $\lambda = 0$, y $\lambda \neq \frac{-1}{2}$, entonces la matriz A es equivalente por filas a la identidad, y entonces el conjunto W es l.i.

Si $\lambda \neq 0$, de la matriz C se sigue,

$$C \underset{-f_3}{\overset{\lambda f_2+f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{-f_2}{\overset{-\lambda f_3+f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = D$$

En D, sustituyendo $\lambda = 1$, entonces, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, que no es equivalente por filas a la identidad, ya que tiene una fila de ceros. Por tanto, los vectores de W son l.d.

Si $\lambda \neq 1$, entonces,

$$C \xrightarrow{\frac{1}{\lambda-1}f_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 + f_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 + f_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \Leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \Leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso el conjunto W es l.i. puesto que Aes equivalente por filas a la identidad.

Resumiendo, se tienen los siguientes casos sobre la independencia lineal del conjunto W según los valores de λ:

a) Si $\lambda = \frac{-1}{2}$ entonces W es l.d.
b) Si $\lambda \neq \frac{-1}{2}$ y $\lambda = 0$ entonces W es l.i.
c) Si $\lambda \neq \frac{-1}{2}$, $\lambda \neq 0$ y $\lambda = 1$ entonces W es l.d.
d) Si $\lambda \neq \frac{-1}{2}$, $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ entonces W es l.i.

Entonces, W es l.d. si $\lambda = 1$ o si $\lambda = \frac{-1}{2}$.

14. Indique porqué la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es invertible y halle una matriz B, de dimensión $2x2$, no nula, tal que $AB = 0$.
Respuesta:
La matriz A no es invertible por alguna de las siguientes razones:

a) $Rng(A) = 1 < 2$, pues tiene una fila de ceros.
b) Como A tiene 1 fila de ceros, $det(A) = 0$.
c) Las filas de A son linealmente dependientes, puesto que la segunda fila es el vector de ceros.
d) Las columnas de A son linealmente dependientes, puesto que son iguales.
e) El sistema $Ax = 0$ tiene infinitas soluciones de la forma, $(x_1, x_2)^t = (t, -t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
f) El sistema $Ax = b$, no tiene solución si $b = (b_1, b_2)^t$ y $b_2 \neq 0$.

Sea $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Entonces, note que si

$$AB = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+z & y+w \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -z \quad y = -w$$

Entonces, podemos tomar a B como cualquier matriz de la forma $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

15. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determine todas las matrices $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, para las cuales, $AB = BA$.

Respuesta:

Buscamos el conjunto de todas las matrices B que conmutan con A. Efectuando los productos matriciales se obtiene;

$$AB = \begin{pmatrix} x+z & y+w \\ z & w \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+w \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = BA \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x+z = x \\ y+w = x+y \\ z = z \\ w = z+w \end{cases} \quad \text{Igualando matrices entrada por entrada}$$

Lo cual es equivalente al sistema homogéneo, $\begin{cases} -x+w = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, que tiene como solución el conjunto de los vectores de la forma $(x, y, z, w) = (t, s, 0, t)$ tales que $s, t \in \mathbb{R}$. Por tanto el conjunto de todas las matrices B que conmutan con A son las matrices de la forma $B = \begin{pmatrix} t & s \\ 0 & t \end{pmatrix}$.

16. Determine si existe una matriz A simétrica, de dimensión $2x2$, tal que

$$\left(A^{-1}\right)^t \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A - I_2\right] = I_2$$

Respuesta:

Supongamos que A es invertible, y que es simétrica, i.e. $A = A^t$. Aplicamos operaciones matriciales sobre la identidad que determina a A;

$$\begin{aligned}
& \left(A^{-1}\right)^t \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A - I_2\right] = I_2 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(A^t\right)^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A - I_2\right] = I_2 && \left(\text{identidad } \left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t\right) \\
\Leftrightarrow \quad & A^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A - I_2\right] = I_2 && (\text{utilizando que } A \text{ es simétrica}) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A - I_2 = A && (\text{multiplicando a la derecha por } A) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} A - A = I_2 && (\text{restando } A \text{ y sumando } I_2) \\
\Leftrightarrow \quad & \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - I_2\right] A = I_2 && (\text{distributividad del producto sobre la suma}) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} A = I_2
\end{aligned}$$

Entonces, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

De esto, se concluye que la matriz simétrica A invertible que es la inversa de $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ no existe. Dicha conclusión se obtiene de cualquiera de las siguientes afirmaciones:

a) La inversa de una matriz simétrica es simétrica, pues si A es simétrica e invertible, se cumple la propiedad: $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1} = (A)^{-1}$. Si $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, esto es una contradiccíon, puesto que $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ no es una matriz simétrica.

b) La inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$. Pero eso significa que $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$, lo que contradice el hecho de que A es simétrica.

17. Determine todos los valore de a y b para que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ 1-b & -1 & -1 & -b \\ a+b & 0 & 1 & a+b \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sea invertible y determine su inversa, cuando exista.

Respuesta:

Aplicamos el procedimiento de cálculo de inversa izquierda para la matriz A, que por teorema, es la misma que la inversa general de A. Se tiene entonces,

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1-a & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-b & -1 & -1 & -b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a+b & 0 & 1 & a+b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{-f_4+f_2}{\overset{-f_4+f_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -a & a & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -b & -1 & -1 & -b-1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ a+b & 0 & 1 & a+b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_2+f_3}{\overset{f_1+f_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -a & a & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -b & -1 & -1 & -b-1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & a-1 & 0 & a-2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = B$$

Si $a \neq 0$, y si $b = 0$, se tiene en B;

$$B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -a & a & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & a-1 & 0 & a-2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{-f_2}{\overset{af_4+f_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a & 0 & a-1 & 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & a-2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_1+f_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a & 0 & a-1 & 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -a-1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{af_3+f_1}{\xrightarrow{f_3+f_2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & a & a & -a^2-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -a-1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{-f_3}{\xrightarrow{-f_1}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -a & -a & a^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & a+1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{-f_1+f_4}{\xrightarrow{-f_1+f_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -a & -a & a^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & a-1 & a-1 & a-a^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a & -a^2 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_2\Leftrightarrow f_3}{\xrightarrow{f_1\Leftrightarrow f_4}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a & -a^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & a-1 & a-1 & a-a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -a & -a & a^2+1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a & -a^2 \\ 1 & a-1 & a-1 & a-a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ -1 & -a & -a & a^2+1 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 0$, y si $b \neq 0$, se tiene en B;

$$B \underset{bf_4+f_2}{\xrightarrow{af_4+f_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a & 0 & a-1 & 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & b-1 \\ 0 & a-1 & 0 & a-2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{-f_2}{\xrightarrow{-f_1+f_3}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a & 0 & a-1 & 1 & 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1-b \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -a-1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_3+f_2}{\xrightarrow{af_3+f_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & a & a & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a-b \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -a-1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & a & a & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a-b \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & a+1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_1+f_4}{\xrightarrow{f_1+f_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & a & a & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_2\Leftrightarrow f_3}{\xrightarrow{f_1\Leftrightarrow f_4}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a-b \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & a & a & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & a & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a-b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -a & -a & 2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a & -1 \\ 1 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & -a-b \\ -1 & -a & -a & 2 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, si $a = 0$, entonces

$$B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -b & -1 & -1 & -b-1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = C$$

Tomando $b = 0$ en C, se tiene,

$$C = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -f_1 \\ \longrightarrow \\ -f_2 \\ -f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -f_3 + f_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -f_1 + f_4 \\ \longrightarrow \\ f_1 + f_2 \\ -2f_1 + f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} f_1 \Leftrightarrow f_4 \\ \longrightarrow \\ f_2 \Leftrightarrow f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, si $b \neq 0$, se tiene en C,

$$C \overset{bf_4 + f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & b-1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -f_1 \\ \longrightarrow \\ -f_2 \\ -f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -f_3 + f_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -b-1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} f_1 + f_2 \\ \longrightarrow \\ -2f_1 + f_3 \\ -f_1 + f_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} f_1 \Leftrightarrow f_4 \\ \longrightarrow \\ f_2 \Leftrightarrow f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, A es invertible para todos los valores reales de a y b.

18. Halle una matriz B tal que

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\right)B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Respuesta:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

De modo que se tiene la expresión equivalente,

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz B buscada debe de ser de tamaño $3x2$. Suponga que

$$B = \begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\\ x_5 & x_6\end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\\ x_5 & x_6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 + 2x_3 + x_5 & x_2 + 2x_4 + x_6\\ x_1 + x_5 & x_2 + x_6\\ 2x_1 + x_3 + 3x_5 & 2x_2 + x_4 + 3x_6\end{pmatrix}$$

Igualando las matrices entrada por entrada se obtiene el sistema:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_3 & + & x_5 & = & 1\\ x_1 & & & + & x_5 & = & 1\\ 2x_1 & + & x_3 & + & 3x_5 & = & 0\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & + & 2x_4 & + & x_6 & = & 1\\ x_2 & & & + & x_6 & = & 1\\ 2x_2 & + & x_4 & + & 3x_6 & = & 0\end{array}$$

Nótese que las primeras tres ecuaciones corresponden sólamente a las variables x_1, x_3, x_5 y las siguientes tres ecuaciones a las variables x_2, x_4, x_6 y que ambos conjuntos de ecuaciones son iguales. Entonces sólamente es necesario resolver uno de esos conjuntos de ecuaciones, y el otro tendrá las mismas soluciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 0\end{array}\right) \underset{-2f_1+f_3}{\overset{-f_1+f_2}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1 & -2\end{array}\right) \overset{\frac{-1}{2}f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 1 & -2\end{array}\right)$$

$$\underset{3f_2+f_3}{\overset{-2f_2+f_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{-f_3+f_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Entonces, $x_1 = x_2 = 3$, $x_3 = x_4 = 0$ y $x_5 = x_6 = -2$. Por lo tanto la matriz B tiene la forma

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Determinantes

1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 6 & m+1 \\ m & -m & 2m-2 & 9 \\ 2m & -m-1 & m+6 & 3m-2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule el determinante de A (sugerencia: realice operaciones elementales para producir ceros antes de proceder al cálculo).

Respuesta:

$$A \underset{-f_2+f_3}{\xrightarrow{-2f_2+f_4}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 6 & m+1 \\ 0 & 1-m & 2m-8 & 8-m \\ 0 & 1-m & m-6 & m-4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_3+f_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 6 & m+1 \\ 0 & 1-m & 2m-8 & 8-m \\ 0 & 0 & 2-m & 2m-12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2f_4+f_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ m & -1 & 6 & m+1 \\ 0 & 1-m & -4 & 3m-16 \\ 0 & 0 & 2-m & 2m-12 \end{pmatrix} = B$$

Si $m \neq 0$

$$A \xrightarrow{-mf_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 6-m & 1 \\ 0 & -(m-1) & -4 & 3m-16 \\ 0 & 0 & 2-m & 2m-12 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 6-m & 1 \\ 0 & 0 & 2-m & 3m-15 \\ 0 & 0 & 2-m & 2m-12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-f_3+f_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 6-m & 1 \\ 0 & 0 & 2-m & 3m-15 \\ 0 & 0 & 0 & 3-m \end{pmatrix} = C$$

Entonces, $det(C) = 1 \cdot (m-1) \cdot (2-m) \cdot (3-m)$ si $m \neq 0$. Si $m = 0$, entonces,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & -1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Entonces $det(A) = 1 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -3 = -6$.
Se concluyen los siguientes valores para el determinante de A:

$$det(A) = \begin{cases} -6 \text{ si } m = 0 \\ (m-1) \cdot (2-m) \cdot (3-m) \text{ si } m \neq 0 \end{cases}$$

b) De acuerdo con lo que obtuvo en (a), ¿para qué valores de m la matriz A es invertible? (Justifique)

Respuesta:
La matriz A no es inversible si $det(A) = 0$. Entonces A no es inversible si $m = 1$, $m = 2$ ó $m = 3$.

c) Según lo que obtuvo en (a), ¿para qué valores de m, los vectores columna de A son linealmente dependientes? (justifique sin hacer cálculos adicionales).

Respuesta:
Las columnas de A son l.d. si A no es invertible, entonces son l.d. si $m = 1$, $m = 2$ ó $m = 3$.

2. Sean A y B matrices cuadradas de orden 4, tales que $det(A) = 2$ y $det(B) = -2$. Calcule $det\left(\frac{1}{2}A^{-1}B^t\right)$.

Respuesta:
Por las propiedades del determinante:

$$det\left(\frac{1}{2}A^{-1}B^t\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 det\left(A^{-1}B^t\right) = \frac{1}{16}det\left(A^{-1}\right) \cdot det\left(B^t\right) = \frac{1}{16}\frac{1}{det(A)}det(B) = \frac{-1}{16}$$

3. Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$, A es una matriz ortogonal si $A \cdot A^t = I_n$.

a) Justifique porqué toda matriz ortogonal A es invertible.

Respuesta:
Para que A sea inversible, por teorema basta con que tenga inversa izquiera o derecha. Y por la definición de matriz ortogonal, $A \cdot A^t = I_n$, entonces A tiene inversa derecha y podemos observar que $A^{-1} = A^t$.

b) Justifique porqué toda matriz ortogonal A tiene determinante 1 ó −1.

Respuesta:
Como $A \cdot A^t = I_n$, entonces por las propiedades del determinante de un producto de matrices y el determinante de una transpuesta se tiene que:

$$1 = det\left(I_n\right) = det(A) \cdot det\left(A^t\right) = det(A) \cdot det(A) = (det(A))^2 \Rightarrow \; det(A) = -1 \text{ ó } det(A) = 1$$

c) Compruebe que la siguiente matriz es ortogonal.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Respuesta:
Por definición, P es una matriz ortogonal si $P \cdot P^t = I_n$, entonces,

$$P \cdot P^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto P es ortogonal.

d) Sin hacer cálculos adicionales, escriba la matrix P^{-1}.
Respuesta:
Por la parte a), es claro que

$$P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

4. Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $|A| = 3$, calcule el determinante de cada una de las siguientes matrices:

a) $B = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Respuesta:

$$A \overset{f_2 \Leftrightarrow f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{4f_2 \\ \frac{1}{2}f_3}}{\overset{2f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Entonces, $det(B) = -2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot det(A) = -12$.

b) $C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3a+4 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{pmatrix}$

Respuesta:

$$A \underset{3f_1 + f_2}{\overset{-f_1 + f_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3a+4 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{pmatrix} = C$$

Entonces, $det(C) = det(A) = 3$.

5. Si el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, donde $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$, es $det(A) = 5$, calcule los siguientes determinantes:

a) $det(3A)$.

Respuesta:
Por las propiedades del determinante, $det(3A) = 3^3 det(A) = 27 \cdot 5 = 135$.

b) $det\left(2A^{-1}\right)$.

Respuesta:
Por las propiedades del determinante, $det\left(2A^{-1}\right) = 2^3 det\left(A^{-1}\right) = \frac{8}{det(A)} = \frac{8}{5}$.

c) $det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ d & e & f \end{pmatrix}$

Respuesta:
Aplicando operaciones de fila sobre A, se pueden relacionar los determinantes de A y el de la matriz buscada;

$$A \overset{2f_2+f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \end{pmatrix} \overset{f_2 \Leftrightarrow f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ d & e & f \end{pmatrix} = -det(A) = -5$$

6. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales aplicando la Regla de Cramer:

$$\begin{array}{rcr} 2x+y-z+w & = & -4 \\ x+2y+2z-3w & = & 6 \\ 3x-y-z+2w & = & 0 \\ 2x+3y+z+4w & = & -5 \end{array}$$

Respuesta:
Para poder resolver el sistema mediante el método de la Regla de Cramer, considere la matriz A de los coeficientes de las ecuaciones del sistema,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Si $det(A) \neq 0$, entonces el sistema tiene solución única y se puede aplicar la Regla de Cramer. Sea b_i la matriz que resulta de reemplazar en la matriz A la columna i por el vector $(-4, 6, 0, -5)^t$. Entonces, las soluciones son de la forma $x_i = \frac{det(b_i)}{det(A)}$. Procedemos a calcular entonces el determinante de A;

$$A \begin{array}{c} -2f_2+f_1 \\ \longrightarrow \\ -3f_2+f_3 \\ -2f_2+f_4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & -7 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -3f_4+f_1 \\ \longrightarrow \\ 2f_4+f_2 \\ -7f_4+f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -23 \\ 1 & 0 & -4 & 17 \\ 0 & 0 & 14 & -59 \\ 0 & -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} f_1 \Leftrightarrow f_2 \\ \longrightarrow \\ -f_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 17 \\ 0 & 0 & 4 & -23 \\ 0 & 0 & 14 & -59 \\ 0 & 1 & 3 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_2 \Leftrightarrow f_4 \\ \longrightarrow \\ \frac{1}{14} f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 17 \\ 0 & 1 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-59}{14} \\ 0 & 0 & 4 & -23 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -4f_3 + f_4 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 17 \\ 0 & 1 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-59}{14} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-43}{7} \end{pmatrix} = B$$

Como la matriz B es triangular, entonces $det(B) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{-43}{7} = \frac{-43}{7}$ y por el efecto de las operaciones elementales sobre el determinante de una matriz, se tiene la siguiente relación entre el determinante de A y el determinante de B;

$$\frac{-43}{7} = det(B) = -1 \cdot \frac{1}{14} \cdot det(A) \quad \Rightarrow \quad det(A) = 86 \neq 0$$

Por lo tanto, se puede aplicar la Regla de Cramer, ya que $det(A) \neq 0$. Aplicando operaciones elementales se pueden calcular de forma similar los siguientes determinantes:

$$det(b_1) = det \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 86 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{86}{86} = 1$$

$$det(b_2) = det \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -172 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{-172}{86} = -2$$

$$det(b_3) = det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} = 258 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{258}{86} = 3$$

$$det(b_4) = det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} = -86 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{-86}{86} = -1$$

Por lo tanto, la solución al sistema es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -2, 3, -1)$.

7. Dada la siguiente matriz $A \in M(3, \mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta & 0 \\ -sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Muestre que la matriz A es invertible para todos los valores de θ.

Respuesta:

Podemos demostrar que A es invertible a partir del valor de su determinante.

$$det(A) = det\begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} = cos^2\theta + sen^2\theta = 1$$

Entonces, $\forall\theta$, se tiene $det(A) = 1 \neq 0$ de modo que A es invertible para todo valor θ.

b) Encuentre la matriz inversa de A.

Respuesta:
Aplicamos el procedimiento para hallar una inversa izquierda, que por teorema, si existe, también la inversa de A y son iguales.

En los siguientes cálculos se utilizan varias de las identidades entre senos y cosenos. También en el desarrollo siguiente se asume que para un determinado valor de θ, los senos y cosenos no son cero. Los casos en que son cero son más simples y se pueden hacer de forma similar.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} cos\theta & sen\theta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen\theta & cos\theta & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{-sen\theta f_2}{\overset{cos\theta f_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} cos^2\theta & cos\theta sen\theta & 0 & cos\theta & 0 & 0 \\ sen^2\theta & -sen\theta cos\theta & 0 & 0 & -sen\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{f_2 + f_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen^2\theta & -sen\theta cos\theta & 0 & 0 & -sen\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-sen^2\theta f_1 + f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & cos\theta & -sen\theta & 0 \\ 0 & -sen\theta cos\theta & 0 & -cos\theta sen^2\theta & -sen\theta cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{-1}{sen\theta cos\theta} f_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & cos\theta & -sen\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Entonces, se concluye que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_2 + 3x_4 - x_5 & = & -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 & = & 1 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 & = & 3 \end{array}$$

a) Calcule el determinante de la matriz del sistema.

Respuesta:
Sea A la matriz del sistema anterior, entonces,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-f_1+f_5]{-f_1+f_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-2f_2+f_4 \\ -2f_2+f_5}]{-3f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \Leftrightarrow f_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{-4}{9}f_4+f_5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{9} \end{pmatrix} = B$$

Como B es una matriz triangular, $det(B) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot -9 \cdot \frac{19}{9} = -19$. Ahora, como A y B son equivalentes por filas, por las propiedades del determinante en relación a las operaciones elementales de fila, se tiene para A y B que, $det(B) = -det(A)$, por tanto $det(A) = 19$.

b) Sin hacer más cálculos, conteste la siguiente pregunta: ¿El sistema de ecuaciones anterior tiene solución única? Justifique su respuesta.

Respuesta:
Como $det(A) \neq 0$, entonces por teorema, el sistema tiene solución única.

9. Sean $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \\ a & a & a & a \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

a) Calcule el determinante de la matriz A.

Respuesta:
Reducimos por filas a la matriz aumentada $(A|C)$,

$$(A|C) \xrightarrow[\substack{-f_1+f_3 \\ -f_1+f_4}]{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & a-1 & a \end{array}\right) \xrightarrow[-f_2+f_4]{-f_2+f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 & a \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -f_3+f_4 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & a \end{array}\right) = (B|D)$$

Como B es una matriz triangular, $det(A) = a \cdot (a-1) \cdot (a-1) \cdot (a-1) = a(a-1)^3$. Como A y B son equivalentes por filas, entonces $a(a-1)^3 = det(B) = det(A)$.

b) Determine los valores de a para los cuales el sistema $A \cdot X = C$ tiene solución única, e indique cual es esa solución.

Respuesta:
El sistema $AX = C$ tiene solución única si y sólo si $det(A) \neq 0$. Por la parte a), $det(A) \neq 0$ si y sólo si $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Como los sistemas $AX = C$ y $BX = D$ son equivalentes, solucionamos $BX = D$. Con $a \neq 0$ y $a \neq 1$,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & a \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{a-1}f_2 \\ \longrightarrow \\ \frac{1}{a-1}f_3 \\ \frac{1}{a-1}f_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a}{a-1} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -f_2+f_1 \\ \longrightarrow \\ -f_3+f_1 \\ -f_4+f_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 0 & 0 & \frac{-a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a}{a-1} \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{a}f_1 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a}{a-1} \end{array}\right)$$

Por lo tanto, la solución única del sistema es: $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = \left(\frac{-1}{a-1}, 0, 0, \frac{a}{a-1}\right)^t$, $a \notin \{0, 1\}$.

c) Determine los valores de a para los cuales el rango de la matriz A es igual a 1.

Respuesta:
En general, como A es de $4x4$, $Rng(A) < 4$ si y sólo si A no es invertible. Y por la parte a), A no es invertible sólamente cuando $a = 0$ ó $a = 1$. Como, $Rng(A) = 1$ si la matriz escalonada reducida equivalente por filas a A tiene sólamente una fila no nula. En B, tomando $a = 1$, y se tiene

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Rng(A) = 1$$

d) Determine los valores de a para los cuales el rango de la matriz A es igual a 2.

Respuesta:

$Rng(A) = 2$ si la matriz escalonada reducida equivalente por filas a A tiene sólamente dos filas no nulas. Por el argumento de parte c), sólamente $a = 0$ puede hacer que $Rng(A) < 4$, pues en este caso A no es invertible. Pero, de B, si se sustituye $a = 0$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_2 + f_1 \\ \longrightarrow \\ f_3 + f_1 \\ f_4 + f_1 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $Rng(A) = 3$, si $a = 0$, y entonces no hay ningún valor de a para el cual $Rng(A) = 2$.

e) Determine los valores de a para los cuales el rango de la matriz A es igual a 3.

Respuesta:
Por la parte d), si $a = 0$, entonces $Rng(A) = 3$.

f) Halle el conjunto solución del sistema $A \cdot X = C$, si $a = 0$.

Respuesta:

Por la parte d), si $a = 0$, entonces $\quad A \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo que el conjunto solución es: $\{(t, 0, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

g) Halle el conjunto solución del sistema $A \cdot X = C$, si $a = 1$.

Respuesta:

Tomando $a = 1$ en la matriz aumentada $\quad (B|D) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Que tiene una ecuación inconsistente, por lo tanto no hay solución al sistema $(B|D)$, ni tampoco al sistema $(A|C)$, ya que ambos son equivalentes.

10. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$, $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

a) Calcule el determinante de la matriz A.

Respuesta:
Utilizando las propiedades de la función determinante, se tiene:

$$det(A) = det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

$$= det\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & b-a & b^2-a^2\\ 0 & c-a & c^2-a^2\end{pmatrix} \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{utilizando las operaciones}\\ \quad -f_1+f_2\\ \quad -f_1+f_3\end{array}\right.$$

$$= (b-a)\cdot(c-a)\cdot det\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & b+a\\ 0 & 1 & c+a\end{pmatrix} \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{propiedad de linealidad}\\ \text{de la función determinante}\\ \text{en las filas de la matriz}\end{array}\right.$$

$$= (b-a)\cdot(c-a)\cdot det\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & 1 & b+a\\ 0 & 0 & c-b\end{pmatrix} \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{utilizando la}\\ \text{operación}\\ \quad -f_2+f_3\end{array}\right.$$

$$= (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b) \qquad (\text{ determinante de una matriz triangular })$$

Por lo tanto, $det(A) = (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$, para todos los valores reales de a, b y c.

b) ¿En cuáles casos el sistema $A\cdot X = 0$ tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro?

Respuesta:
El sistema $AX = 0$ tiene soluciones infinitas que dependen de un parámetro si $Rng(A) = 2$. Realizamos operaciones elementales sobre las filas de A;

$$A \underset{-f_1+f_3}{\overset{-f_1+f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & b-a & b^2-a^2\\ 0 & c-a & c^2-a^2\end{pmatrix} \overset{-f_2+f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & b-a & b^2-a^2\\ 0 & c-b & c^2-b^2\end{pmatrix} = B$$

De B, se observa que hay sólamente una fila de ceros si se presenta alguna de las siguientes combinaciones de valores para a, b y c;

1) $a = b$ y $a \neq c$
2) $a = c$ y $a \neq b$
3) $b = c$ y $b \neq a$.

Por lo tanto, en cualquiera de las combinaciones anteriores, el sistema tiene soluciones infinitas dependiendo de un parámetro.

c) ¿En cuáles casos el sistema $A \cdot X = 0$ tiene infinitas soluciones que dependen de dos parámetros?

Respuesta:
El sistema $AX = 0$ tiene soluciones infinitas que dependen de dos parámetros si $Rng(A) = 1$. De la matriz B de la parte b), esto sucede si $a = b = c$.

d) ¿En cuáles casos el sistema $A \cdot X = 0$ tiene solución única?

Respuesta:

Para que el sistema homogéneo tenga solución única, es necesario que $Rng(A) = 3$, o equivalentemente, que $det(A) = (b - a) \cdot (c - a) \cdot (c - b) \neq 0$. Entonces, el sistema tiene solución única si y sólo si $a \neq b$, $b \neq c$ y $a \neq c$.

e) ¿En cuáles casos el sistema $A \cdot X = 0$ es inconsistente?

Respuesta:
Como el sistema es homogéneo, siempre tiene la solución trivial. Entonces nunca es inconsistente.

11. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & a-1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule el determinante de la matriz A.

Respuesta:
Como A es una matriz con forma de bloques:

$$det(A) = det\begin{pmatrix} a+1 & 2 \\ -1 & a-1 \end{pmatrix} \cdot det\begin{pmatrix} a+1 & 2 \\ -1 & a-1 \end{pmatrix} = ((a+1)(a-1)+2)^2 = \left(a^2+1\right)^2$$

b) Indique por qué el sistema $Ax = b$ siempre tiene solución única, con $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ y $b \in \mathbb{R}^4$.

Respuesta:
Note que $det(A) \neq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$ ya que $a^2 \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; a^2 + 1 \geq 1$ y por lo tanto, $det(A) \geq 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Como $det(A) \neq 0$, entonces existe solución única para cada $b \in \mathbb{R}^4$.

12. Si $det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 8$, calcule (haciendo uso de las propiedades del determinante) el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2a_{12} - 3a_{22} & 2a_{11} - 3a_{21} & 2a_{13} - 3a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Respuesta:

Sea

$$B = \begin{pmatrix} 2a_{12} - 3a_{22} & 2a_{11} - 3a_{21} & 2a_{13} - 3a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$B \xrightarrow{3f_3+f_1} \begin{pmatrix} 2a_{12} & 2a_{11} & 2a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}f_1} \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \Leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = C$$

Entonces, $det(C) = -1 \cdot \frac{1}{2} \cdot det(B)$. Además

$$C^t = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \Leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = D$$

Y se tiene $det(D) = -1 \cdot det\left(C^t\right) = -det(C) = \frac{1}{2}det(B)$. Como $D^t = A$, entonces $det(A) = det\left(D^t\right) = det(D) = \frac{1}{2}det(B)$. Entonces, $det(B) = 2 \cdot det(A) = 2 \cdot 8 = 16$.

5. Geometría vectorial de R^n

1. Sean $A = (3, 0, 0)$, $B = (1, 0, 2)$, y $C = (2, 3, 0)$ puntos en $\mathbb{R}^3$.

   a) Determine si el triángulo ABC es rectángulo, obtusángulo o acutángulo.

   Respuesta:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 2) - (3, 0, 0) = (-2, 0, 2)$$
$$\overrightarrow{AC} = (2, 3, 0) - (3, 0, 0) = (-1, 3, 0)$$

   Entonces, del producto interior de $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2) \cdot (-1, 3, 0) = 2 > 0$ y por lo tanto el ángulo $\angle BAC$ es agudo.

$$\overrightarrow{CA} = (3, 0, 0) - (2, 3, 0) = (1, -3, 0)$$
$$\overrightarrow{CB} = (1, 0, 2) - (2, 3, 0) = (-1, -3, 2)$$

   Del producto interior de $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (1, -3, 0) \cdot (-1, -3, 2) = 8 > 0$ y por lo tanto el ángulo $\angle ACB$ es agudo.

$$\overrightarrow{BA} = (3, 0, 0) - (1, 0, 2) = (2, 0, -2)$$
$$\overrightarrow{BC} = (2, 3, 0) - (1, 0, 2) = (1, 3, -2)$$

   Del producto interior de $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (2, 0, -2) \cdot (1, 3, -2) = 6 > 0$ y por lo tanto el ángulo $\angle ABC$ es agudo.

   Por tanto el triángulo $\triangle ABC$ es acutángulo.

   b) Determine el perímetro del triángulo ABC.

   Respuesta:
   Como el perímetro es la suma de los lados del triángulo, y como cada lado puede ser representado por un vector en la notación de flecha dirigida, entonces tenemos que:

$$\text{Perímetro } = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{AC}\right\| + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$$

   Nótese que en lo anterior, se usó el hecho de que la norma de un vector que representa a una flecha dirigida no depende de hacia cuál de los dos puntos apunta el vector. Entonces,

$$\text{Perímetro } = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} + \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 0^2} + \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} + \sqrt{10} + \sqrt{14}$$

   c) Calcule la proyección del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el vector $\overrightarrow{AC}$.

   Respuesta:

$$Proy_{\overrightarrow{AC}} \ \overrightarrow{AB} = \frac{2}{10} \cdot (-1, 3, 0) = \left(\frac{-1}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$$

d) Determine el área del triángulo ABC.

Respuesta:
Considere el paralelogramo con lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. El area de ese paralelogramo, es el doble del área del triángulo $\triangle ABC$. Entonces usamos la fórmula de cálculo del área del paralelogramo:

$$\text{Área del paralelogramo } = \left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|$$

Entonces,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2) \times (-1, 3, 0) = (-6, -2, -6)$$

$$\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{76}$$

Entonces, Área $\triangle ABC \ = \frac{\sqrt{76}}{2}$.

e) Determine un punto D de manera que $ABCD$ sea un paralelogramo.

Respuesta:
Si se considera el paralelogramo con lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, por la interpretación de la suma, el vértice opuesto a A, que es el vértice que denominamos como D, cumple con la igualdad:

$$D - A = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2) + (-1, 3, 0) = (-3, 3, 2)$$

Entonces, $D = (-3, 3, 2) + A = (-3, 3, 2) + (3, 0, 0) = (0, 3, 2)$.

2. Sean $A = (1, 2, -1)$, $B = (1, 4, 3)$ y $C = (1, -1, 5)$ puntos en $\mathbb{R}^3$.

a) Determine un punto D de manera que $ABCD$ sea un paralelogramo.

Respuesta:
Considere el paralelogramo con lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ unidos por el vértice A. Por la interpretación de la suma, si se escoge el punto D que satisface, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ entonces se obtiene un paralelogramo con vértices A, B, C y D. Entonces,

$$\overrightarrow{AB} = (1, 4, 3) - (1, 2, -1) = (0, 2, 4) \qquad \overrightarrow{AC} = (1, -1, 5) - (1, 2, -1) = (0, -3, 6)$$

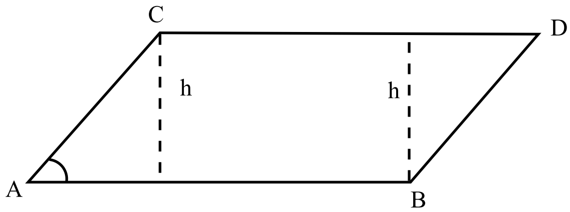
Entonces, $D - A = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (0, -1, 10)$, por tanto $D = (0, -1, 10) + A = (0, -1, 10) + (1, 2, -1) = (1, 1, 9)$.

b) Calcula la longitud de la altura del paralelogramo sobre el lado $\overrightarrow{DC}$.

Respuesta:
Según la parte a) el vértice D es opuesto al vértice A, y los vértices B y C son opuestos. Para establecer sobre que lado del paralelogramo se referencia la altura, considere que esta se

mide referenciada respecto al lado $\overrightarrow{AB}$, i.e. la altura h es la longitud del segmento que va del vértice C en forma perpendicular hasta el lado $\overrightarrow{AB}$. Además, considere el ángulo $\angle CAB$ que denominaremos como θ.

Véase la figura.



Dado lo anterior, entonces se tiene que

$$sen(\theta) = \frac{h}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$$

Pero el ángulo θ también cumple que

$$\left\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \left\|\overrightarrow{AB}\right\| sen(\theta)$$

Por lo tanto, de las igualdades anteriores se concluye que;

$$h = \frac{\left\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$$

Donde,

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-24, 0, 0)$$

Entonces, $\left\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right\| = 24$ y $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{20}$, por lo tanto

$$h = \frac{24}{\sqrt{20}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

c) Determine el área del paralelogramo $ABCD$.

Respuesta:
El área está dada por $\left\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right\| = 24$.

d) Determine si el ángulo del paralelogramo cuyo vértice es A es recto, obtuso o agudo.

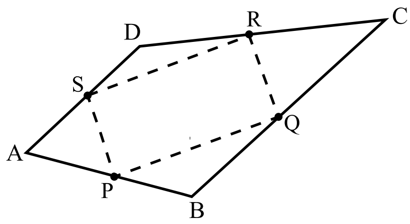
Respuesta:

La clasificación del ángulo cuyo vértices es A, se puede hacer mediante el signo del valor que tome el producto interno de vectores en $\mathbb{R}^3$ sobre los lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ que coinciden en A. Entonces,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (0, -3, 6) \cdot (0, 2, 4) = 18 > 0$$

Por tanto el ángulo es agudo.

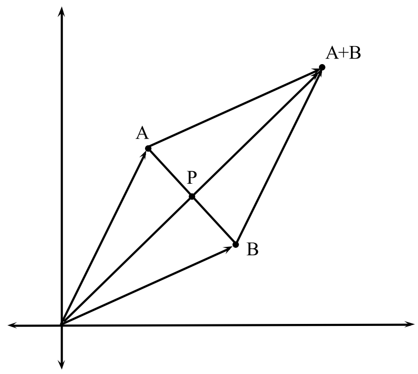
3. Considere el cuadrilátero con vértices A, B, C, y D, que se muestra a continuación.



Si P, Q, R y S son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente; muestre que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$.

Respuesta:

Existen por lo menos dos maneras diferentes para responder a este ejercicio. La primera es obteniendo una expresión para los puntos medios en términos de los extremos del segmento. Vamos a obtener una expresión primero para P en términos de A y B. Vease la figura.



Nótese que los vectores $\overrightarrow{0A}$ y $\overrightarrow{0B}$ forman los lados de un paralelogramo, donde las diagonales son AB y el segmento que va de 0 a $A + B$. Como P es el punto medio del segmento AB, entonces es el punto medio de la diagonal AB del paralelogramo. Como las diagonales de un paralelogramo se cruzan en su punto medio, entonces P es el punto medio del segmento que va de 0 a $A + B$, donde dicho segmento es el vector $\overrightarrow{0\,(A + B)}$. Como el vector $\overrightarrow{0P}$ es la mitad de largo que el vector $\overrightarrow{A + B}$ y apunta en la misma dirección, por la interpretación del producto por escalar tenemos que $\overrightarrow{0P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{0\,(A + B)}$ y de donde se concluye que $P = \frac{1}{2}(A + B)$.

Para los puntos Q, R y S se puede hacer una interpretación similar, y se concluye que

$$P = \frac{A+B}{2} \qquad S = \frac{A+D}{2} \qquad R = \frac{D+C}{2} \qquad Q = \frac{B+C}{2}$$

Ahora, por la definición de vector como flecha dirigida, se tiene;

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PS} = S - P = \frac{A+D}{2} - \frac{A+B}{2} = \frac{D-B}{2} = \frac{\overrightarrow{BD}}{2} \\ \overrightarrow{QR} = R - Q = \frac{D+C}{2} - \frac{B+C}{2} = \frac{D-B}{2} = \frac{\overrightarrow{BD}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \quad \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$$

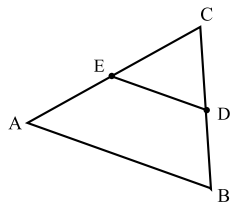
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = Q - P = \frac{B+C}{2} - \frac{A+B}{2} = \frac{C-A}{2} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} \\ \overrightarrow{SR} = R - S = \frac{D+C}{2} - \frac{A+D}{2} = \frac{C-A}{2} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$

La segunda manera de responder es utilizando la interpretación de suma de vectores como el desplazamiento resultante en la dirección de los vectores. Nótese que el vector $\overrightarrow{PS}$ se puede ver como el desplazamiento de P a S, y dicho desplazamiento se puede hacer primero de P a A y luego de A a S. Es decir, se cumple por la interpretación de la suma que: $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AS}$. Ahora, como el punto P está colocado en el punto medio del segmento AB, se sigue que el vector $\overrightarrow{PA}$ tiene la misma dirección y la mitad de longitud que el vector $\overrightarrow{BA}$. Entonces por la interpretación del producto por un escalar, se sigue que $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ y similarmente se tiene que $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Sustituyendo esas dos expresiones en la igualdad que obtuvimos de la interpretación de la suma, se obtiene que:

$$\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(A - B + D - A) = \frac{1}{2}(D - B) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

Que es el mismo resultado que obtuvimos por el otro método. Similarmente se obtienen las expresiones para los otros puntos.

4. Considere el triángulo con vértices A, B y C, que se muestra a continuación.



Si E y D son los puntos medios de los lados CA y CB, respectivamente; muestre, usando geometría vectorial, que $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Respuesta:

Nóte que por la interpretación de la suma, el vector $\overrightarrow{ED}$ que es el desplazamiento resultante de E a D, se puede ver como el desplazamiento primero de E a C y luego de C a D. Entonces, se sigue que: $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}$. Ahora, como el punto E está en el medio del segmento AC, se sigue por la interpretación del producto por un escalar que $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ y similarmente, se sigue que $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (note que aquí el vector $\overrightarrow{CB}$ debe seguir la misma dirección que $\overrightarrow{CD}$). Sustituyendo en la igualdad obtenida por la interpretación de la suma, se tiene que:

$$\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(C - A + B - C) = \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

5. Dados los siguientes puntos en $\mathbb{R}^3$: $A = (0,1,0)$, $B = (2,2,0)$, $C = (0,0,2)$ y $D = (a,b,c)$.

   a) Determine los valores de a, b y c de modo que $ABCD$ sea un paralelogramo.

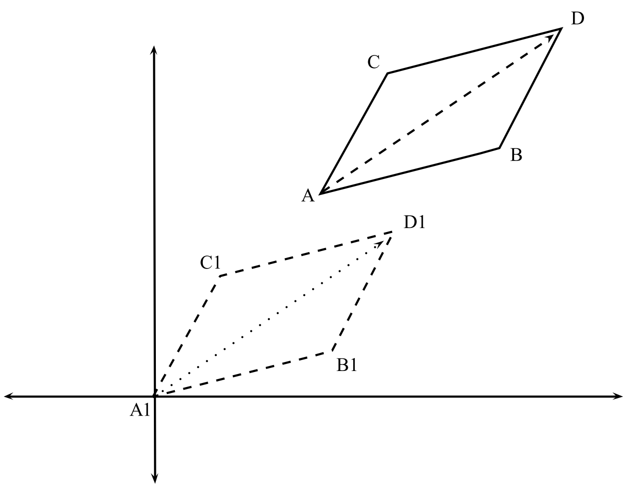
   Respuesta:
   La respuesta a esta pregunta se puede hacer directamente con un argumento algebraico, sin embargo, se va a realizar también una interpretación geométrica al proceso algebraico.

   Para que el polígono de vértices $ABCD$ sea un paralelogramo, se debe escoger el punto D, y en consecuencia, valores de a, b y c, tales que, $ABCD$ sea un paralelogramo con lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Por la interpretación de la suma de vectores, el punto D debe cumplir que, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donde $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,2,0) - (0,1,0) = (2,1,0)$ y $\overrightarrow{AC} = C - A = (0,0,2) - (0,1,0) = (0,-1,2)$. Entonces,

$$D - A = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (2,1,0) + (0,-1,2) = (2,0,2)$$

$$\Rightarrow \quad D = (2,0,2) + A = (2,0,2) + (0,1,0) = (2,1,2)$$

   Entonces, para que $ABCD$ sea un paralelogramo es necesario que $a = 2$, $b = 1$ y $c = 2$.



   Ahora vamos a presentar una interpretación geométrica del proceso algebraico realizado. Cuando se realiza el cálculo correspondiente a la igualdad, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, el paralelogramo de lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, es en realidad el paralelogramo $A_1B_1C_1D_1$ que aparece en la figura, donde A_1 es el origen, $B_1 = \overrightarrow{AB}$, $C_1 = \overrightarrow{AC}$ y $D_1 = \overrightarrow{AD}$.

   El cálculo permite determinar para el paralelogramo $A_1B_1C_1D_1$ que $D_1 = (2,0,2)$. Ahora, como se observa en la figura, el paralelogramo $ABCD$ es igual al paralelogramo $A_1B_1C_1D_1$, pero trasladado desde el origen hasta el punto A. Entonces el punto D es igual a $A + D_1 =$

$(0,1,0)+(2,0,2)=(2,1,2)$ que es el resultado algebraico antes obtenido.

b) Determine el punto E, que corresponde a la intersección de las dos diagonales del paralelogramo $ABCD$.

Respuesta:
Por propiedades geométricas, las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí, de modo que el punto de intersección E de las dos diagonales es igual al punto medio de ambas diagonales. Podemos tomar entonces, $E=\frac{B+C}{2}=\frac{A+D}{2}=\frac{1}{2}(2,2,2)=(1,1,1)$.

c) Calcule el coseno del ángulo del paralelogramo $ABCD$, cuyo vértice es el punto B.

Respuesta:
Por la forma en que se escogió el punto D, los lados del paralelogramo $ABCD$ adyacentes al punto B son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BD}$. Entonces,

$$\overrightarrow{AB}=(2,2,0)-(0,1,0)=(2,1,0) \quad \Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{BD}=(2,1,2)-(2,2,0)=(0,-1,2) \quad \Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{BD}\right\|=\sqrt{5}$$

Sea θ el ángulo correspondiente al vértice del punto B, entonces

$$cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{BD}\right\|}=\frac{-1}{5}$$

d) Calcule el área de la región delimitada por el paralelogramo $ABCD$.

Respuesta:
Por teorema, el área del paralelogramo $ABCD$ de lados, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ está dada por $Area(ABCD)=\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$. Entonces,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(2,-4,-2) \quad \Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{24}$$

Entonces el área de la región limitada por el paralelogramo es igual a $\sqrt{24}$.

6. Sean $A=(0,2,-1)$, $B=(0,2,-2)$, $C=(-2,0,-2)$ y $D=(-1,1,-1)$ puntos en $\mathbb{R}^3$.

a) Determine si $ABCD$ es un paralelogramo o no.

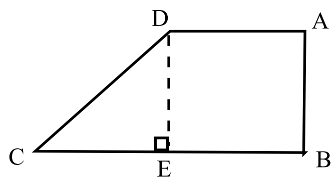
Respuesta:
Por definición, $ABCD$ es un paralelogramo si sus lados opuestos son paralelos. Aquí los lados $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son opuestos y $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son opuestos. Entonces, calculamos los vectores flecha correspondientes a esos lados:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,2,-2) - (0,2,-1) = (0,0,-1) = -\overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{AD} = D - A = (-1,1,-1) - (0,2,-1) = (-1,-1,0) = -\overrightarrow{DA}$$
$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-2,0,-2) - (0,2,-2) = (-2,-2,0) = -\overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{DC} = C - D = (-2,0,-2) - (-1,1,-1) = (-1,-1,-1) = -\overrightarrow{CD}$$

y claramente, $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, y por tanto los lados $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son paralelos. Por otro lado, no es posible multiplicar a $\overrightarrow{AB}$ por un escalar y que se obtenga $\overrightarrow{DC}$, entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ no son paralelos. Se concluye que $ABCD$ no es un paralelogramo.

b) Calcule el área de la región delimitada por el cuadrilátero $ABCD$.

Respuesta:
La forma más sencilla de calcular el área es identificando la forma del cuadriátero. Note que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ y $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$. Por tanto los ángulos correspondientes a los vértices A y B son rectos. Mientras que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = -2 < 0$ y $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = 4 > 0$. Entonces lo ángulos con vértices C y D son agudo y obtuso respectivamente. De hecho, el cuadrilátero $ABCD$, es como se aprecia en la figura.



El área de la región encerrada por el cuadrilátero $ABCD$, corresponde a la suma del área del triángulo rectángulo CDE, y el área del rectángulo $ABED$.

El área de $ABCD$ es base por altura, es decir,

$$\text{área } ABED = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Para encontrar el área del triángulo CDE necesitamos la medida de la base CE. Podemos encontrar este vector con la proyección ortogonal de $\overrightarrow{CD}$ sobre $\overrightarrow{CB}$:

$$Proy_{\overrightarrow{CB}}\, \overrightarrow{CD} = \frac{(1,1,1)\cdot(2,2,0)}{\|(2,2,0)\|^2} \cdot (2,2,0) = (1,1,0) = \overrightarrow{CE}$$

Entonces,

$$\text{área } CDE = \frac{\left\|\overrightarrow{CE}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{DE}\right\|}{2} = \frac{\left\|\overrightarrow{CE}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entonces,

$$\text{área } ABCD = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

c) Determine la medida en grados del ángulo interno con vértice A del cuadrilátero $ABCD$.

Respuesta:
Como se aprecia en la figura de la parte a), los lados del cuadrilátero $ABCD$ que determinan el ángulo θ corespondiente al vértice A son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$. Y como, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, entonces, los lados son ortogonales, y por consiguiente $\theta=\frac{\pi}{2}$, es decir, $\theta=90$ grados.

7. Sean los vectores $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^3$, tales que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$, $\left\|\overrightarrow{u}\right\|=\left\|\overrightarrow{v}\right\|=2$.

a) Calcule el seno del ángulo entre los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Respuesta:
Sea θ el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$. Como $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$, entonces son ortogonales, y por definición, $\theta=\frac{\pi}{2}$. Entonces, $sen\theta=1$.

b) Determine el valor en grados del ángulo entre los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Respuesta:
Por la parte a), el ángulo entre los vectores es de 90 grados.

c) Calcule la norma o magnitud del vector $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$.

Respuesta:
Se tiene, $\left\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right\|=\left\|\overrightarrow{u}\right\|\left\|\overrightarrow{v}\right\|sen\theta=2\cdot 2\cdot 1=4$.

d) Determine el valor que se obtiene al realizar las siguientes operaciones:

$$\left(\overrightarrow{u}-\left(\overrightarrow{u}\times\left(2\overrightarrow{v}\right)\right)+3\overrightarrow{v}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{v}+\left(\left(3\overrightarrow{u}\right)\times\overrightarrow{v}\right)+9\overrightarrow{u}\right)$$

Respuesta:
Utilizando las propiedades del producto interno escalar, y del producto cruz, se tiene que:

$$\left(\overrightarrow{u}-\left(\overrightarrow{u}\times\left(2\overrightarrow{v}\right)\right)+3\overrightarrow{v}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{v}+\left(\left(3\overrightarrow{u}\right)\times\overrightarrow{v}\right)+9\overrightarrow{u}\right)$$

$$=\left(\overrightarrow{u}-2\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right)+3\overrightarrow{v}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{v}+3\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right)+9\overrightarrow{u}\right)$$

$$\begin{aligned}=\ &\overrightarrow{u}\cdot 2\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\cdot 3\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right)+\overrightarrow{u}\cdot 9\overrightarrow{u}-2\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right)\cdot 2\overrightarrow{v}-2\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right)\cdot 3\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right)\\ &-2\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right)\cdot 9\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}\cdot 2\overrightarrow{v}+3\overrightarrow{v}\cdot 3\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right)+3\overrightarrow{v}\cdot 9\overrightarrow{u}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\ &29\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-18\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right)\cdot\overrightarrow{u}-4\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right)\cdot\overrightarrow{v}+3\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right)\\ &+9\overrightarrow{v}\cdot\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right)+9\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2+6\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2-6\left\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right\|^2\end{aligned}$$

$$= 29\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} - 15\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right) - 5\overrightarrow{v}\cdot\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right) + 9\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 + 6\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 - 6\left\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right\|^2$$

$$= 29\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} - 15\left(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{u}\right)\cdot\overrightarrow{v} - 5\left(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{v}\right)\cdot\overrightarrow{u} + 9\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 + 6\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 - 6\left\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right\|^2$$

$$= 9\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 + 6\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 - 6\left\|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}\right\|^2 \quad \text{pues} \quad \overrightarrow{u}\times\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}\times\overrightarrow{v} = 0 \quad \text{y sustituyendo} \quad \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$$

$$= 9\cdot 4 + 6\cdot 4 - 6\cdot 16 = -36 \quad \text{sustituyendo} \quad \left\|\overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{v}\right\| = 2$$

Por lo tanto, se obtiene que:

$$\left(\overrightarrow{u} - \left(\overrightarrow{u}\times\left(2\overrightarrow{v}\right)\right) + 3\overrightarrow{v}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{v} + \left(\left(3\overrightarrow{u}\right)\times\overrightarrow{v}\right) + 9\overrightarrow{u}\right) = -36$$

8. Considere los vectores $\overrightarrow{u} = (1,0,2)$, $\overrightarrow{v} = (-2,0,3)$ y $\overrightarrow{w} = (2,2,2)$.

a) Si $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{u}\,x\,\overrightarrow{v}$, determine $Proy_{\overrightarrow{r}}\,\overrightarrow{w}$.

Respuesta:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{u}\,x\,\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (0,-7,0)$$

Y como $\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{w} = -14$ y $\left\|\overrightarrow{r}\right\|^2 = 49$, entonces

$$Proy_{\overrightarrow{r}}\,\overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{w}}{\left\|\overrightarrow{r}\right\|^2}\cdot\overrightarrow{r} = \frac{-14}{49}(0,-7,0) = (0,2,0)$$

b) Calcule el área del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

Respuesta:
Área del paralelogramo $= \left\|\overrightarrow{u}\,x\,\overrightarrow{v}\right\| = \left\|\overrightarrow{r}\right\| = \sqrt{49} = 7$.

c) Determine la medida del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{w}$ y $\overrightarrow{r}$.

Respuesta:
Como $\left\|\overrightarrow{w}\right\| = \sqrt{12}$ y $\left\|\overrightarrow{r}\right\| = 7$, entonces, por la fórmula del coseno del ángulo se tiene que

$$cos\theta = \frac{\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{r}}{\left\|\overrightarrow{w}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{r}\right\|} = \frac{-14}{\sqrt{12}\cdot 7} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

d) Calcule el volúmen del paralelepípedo que determinan los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ y $\overrightarrow{r}$.

Respuesta:
Si A es la matriz con filas $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{w}$, i.e. si

$$A = \begin{bmatrix} \overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{r} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

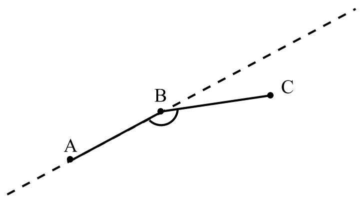
El volúmen del paralelepípedo de lados $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ y $\overrightarrow{r}$ es el valor absoluto del determinante de A. Y como, $det(A) = 14$, entonces concluimos que el volúmen del paralelepípedo es 14.

6. Rectas y planos en R^n

1. En $\mathbb{R}^3$ considere los puntos $A = (1, -2, 3)$, $B = (5, 3, 2)$ y $C = (7, -1, 4)$.

   a) Verifique que estos puntos no son colineales (es decir, no pertenecen a la misma recta).

   Respuesta:
   Nótese que los tres puntos A, B y C no son colineales si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ no son paralelos.



   Entonces,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5, 3, 2) - (1, -2, 3) = (4, 5, -1)$$
$$\overrightarrow{BC} = C - B = (7, -1, 4) - (5, 3, 2) = (2, -4, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (4, 5, -1) \cdot (2, -4, 2) = -14 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{entonces el ángulo es obtuso}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{4^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{42}$$
$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24}$$

   Entonces, el ángulo entre los vectores está determinado por,

$$cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \frac{-14}{\sqrt{42}\sqrt{24}} = \frac{-\sqrt{7}}{6}$$

   Como $cos\theta \neq 1$ y $cos\theta \neq -1$, entonces los vectores no son paralelos, y por tanto los puntos A, B y C no son colineales.

   b) Escriba las ecuaciones escalares paramétricas del plano P que contiene los puntos A, B y C.

   Respuesta:
   Para determinar la ecuación vectorial del plano P, se necesitan un punto perteneciente al plano y dos vectores que se encuentren dentro del plano y que no sean paralelos. Como los puntos A, B y C están en el plano, entonces los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman parte del plano y se pueden utilizar como vectores directores.

   Entonces

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (7, -1, 4) - (1, -2, 3) = (6, 1, 1)$$

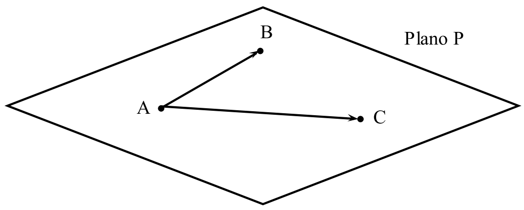
Por lo que la ecuación vectorial del plano es:

$$(x, y, z) = A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = (1, -2, 3) + s(4, 5, -1) + t(6, 1, 1)$$

Y las ecuaciones paramétricas escalares del plano P son entonces,

$$\begin{cases} x = 1 + 4s + 6t \\ y = -2 + 5s + t \\ z = 3 - s + t \end{cases}$$

La interpretación geométrica se observa en la siguiente figura:



c) Escriba la ecuación normal del plano P.

Respuesta:
Un vector normal al plano P es:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (6, -10, -26) = 2(3, -5, -13)$$

Podemos tomar η como, $\eta = (3, -5, -13)$ que es entonces un vector normal al plano P. La ecuación normal del plano satisface:

$$X \cdot \eta = A \cdot \eta \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (3, -5, -13) = (1, -2, 3) \cdot (3, -5, -13) \Leftrightarrow 3x - 5y - 13z = 3 + 10 - 39 = -26$$

La ecuación normal del plano P es $3x - 5y - 13z = -26$.

2. Considere las rectas L_1 y L_2 cuyas ecuaciones son:

$$L_1 : \quad (x, y, z) = (3 + t, 7 + 2t, -1 + 3t), \quad t \in \mathbb{R}; \qquad L_2 : \quad \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = z - 2$$

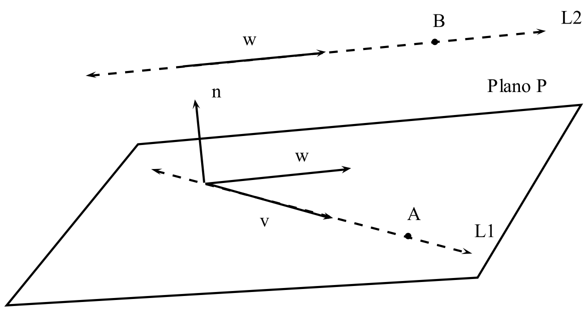
a) Determine la ecuación normal del plano P que contiene a la recta L_1 y es paralelo a L_2.

Respuesta:
Las ecuaciones vectoriales de las rectas L_1 y L_2 son,

$$L_1: \quad (x,y,z) = (3,7,-1) + t(1,2,3) = A + tv$$
$$L_2: \quad (x,y,z) = (0,1,2) + t(3,2,1) = B + tw$$

Note que v y w no son vectores paralelos, por lo que las rectas L_1 y L_2 tampoco lo son.

Como el plano P contiene a L_1, el vector v está en el plano, junto con el punto A por donde pasa la recta. Además como la recta L_2 es paralela al plano P, el vector director w tiene la misma dirección que el plano. Y como v y w no son paralelos, generan al plano P.



Por tanto, un vector ortogonal al plano P es el vector $v \times w$;

$$v \times w = (3,2,1) \times (1,2,3) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (4,-8,4) = 4(1,-2,1)$$

Podemos tomar al vector $\eta = (1,-2,1)$ que es un vector normal al plano P. Y el punto A de L_1 como un punto del plano P. La ecuación normal del plano P está dada por:

$$X \cdot \eta = A \cdot \eta \Leftrightarrow (x,y,z) \cdot (1,-2,1) = (3,7-1) \cdot (1,-2,1) \Leftrightarrow x - 2y + z = 3 - 14 - 1 = -12$$

La ecuación del plano P es entonces $x - 2y + z = -12$.

b) Determine la ecuación de la recta L_3 que es ortogonal a L_1 y a L_2 y corta a ambas rectas.

Respuesta:
De la parte a), el vector $\eta = (1,-2,1)$ es ortogonal tanto a L_1 como a L_2. Entonces L_3 es la recta con vector director $(1,-2,1)$ y que pasa por los puntos (x_1,y_1,z_1) en L_1 y (x_2,y_2,z_2) en L_2, tales que:

$$(x_1,y_1,z_1) - (x_2,y_2,z_2) = k(1,-2,1)$$

i.e. buscamos que el vector que va de (x_2,y_2,z_2) a (x_1,y_1,z_1) sea paralelo al vector director $(1,-2,1)$ de L_3. Lo anterior equivale a que existen s,t,k tales que:

$$(3,7,-1)+t(1,2,3)-(0,1,2)-s(3,2,1) = k(1,-2,1) \Leftrightarrow (3+t-3s, 6+2t-2s, -3+3t-s) = (k,-2k,k)$$

Que es equivalente a las ecuaciones,

$$\begin{array}{rcl} 3+t-3s &=& k \\ 6+2t-2s &=& -2k \\ -3+3t-s &=& k \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} k-t+3s &=& 3 \\ -2k-2t+2s &=& 6 \\ k-3t+s &=& -3 \end{array}$$

Por tanto, para encontrar los valores de k, t, s resolvemos el sistema anterior,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2f_1+f_2 \\ \longrightarrow \\ -f_1+f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 8 & 12 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{4}f_2 \\ \longrightarrow \\ \frac{-1}{2}f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -f_2+f_3 \\ \longrightarrow \\ f_2+f_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{3}f_3 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2f_3+f_2 \\ \longrightarrow \\ -f_3+f_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Entonces, $k = -2$, $t = 1$ y $s = 2$.

El punto de L_1 por donde pasa la recta L_3 es $(x_1, y_1, z_1) = (3, 7, -1) + 1(1, 2, 3) = (4, 9, 2)$ y el punto L_2 por donde pasa la recta L_3 es $(x_2, y_2, z_2) = (0, 1, 2) + 2(3, 2, 1) = (6, 5, 4)$. Entonces la ecuación de la recta L_3 es: $(x, y, z) = (4, 9, 2) + t(1, -2, 1)$.

c) Determine la distancia de la recta L_2 al plano P.

Respuesta:
Como L_2 es paralela al plano P, entonces la distancia entre la recta L_2 y el plano P es constante para todo punto de L_2.

Tomamos el punto, $Q = (0, 1, 2) \in L_2$. Entonces lo que buscamos es la distancia de Q al plano P

$$d(Q, P) = \frac{|(A-Q)\cdot\eta|}{\|\eta\|}$$

donde $A \in P$, η es vector normal al plano. Como L_1 está en P, podemos tomar $A = (3, 7, -1)$

$$(A-Q) = (3, 7, -1)-(0, 1, 2) = (3, 6, -3) \;\; \Rightarrow \;\; (A-Q)\cdot\eta = (3, 6, -3)\cdot(1, -2, 1) = -12 \;\; \text{y} \;\; \|\eta\| = \sqrt{6}$$

Entonces, $d(Q, P) = \frac{|-12|}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}}$, es la distancia entre Q y el plano P, que por lo mencionado antes es igual a la distancia entre L_2 y P.

3. En $\mathbb{R}^3$ considere los puntos $A = (1, 2, 3)$ y $B = (2, 4, 5)$ y la recta L_1 de ecuación, $(x, y, z) = (2t, 1-t, 2+t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Determine las ecuaciones simétricas de la recta L_2 que pasa por A y por B.

Respuesta:

Para obtener las ecuaciones simétricas de L_2, primero necesitamos determinar su ecuación vectorial. Para econtarla, necesitamos un punto por el que pase la recta y un vector director.

Como punto, podemos tomar el punto A. Como vector director, $\overrightarrow{v}$, tomamos

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,4,5) - (1,2,3) = (1,2,2)$$

Entonces, la ecuación vectorial de L_2 es

$$(x,y,z) = (1,2,3) + t(1,2,2) \;\mid\; t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x - 1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$$

Son las ecuaciones simétricas de L_2.

b) Verifique que las rectas L_1 y L_2 no se cortan.

Respuesta:
La ecuación vectorial de la recta L_1 es:

$$(x,y,z) = (0,1,2) + s(2,-1,1) \;\mid\; s \in \mathbb{R}$$

Las rectas L_1 y L_2 se cortan, si existe algún vector (x,y,z) que satisface las ecuaciones de las dos rectas. Es decir, si existen s y t tales que,

$$(0,1,2) + s(2,-1,1) = (1,2,3) + t(1,2,2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2s - t = 1 \\ -s - 2t = 1 \\ s - 2t = 1 \end{cases}$$

Lo cual determina el sistema,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \Leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 + f_2]{-2f_1 + f_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{3}{4}f_2 + f_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Como el sistema tiene una ecuación inconsistente, entonces no tiene solución, y por lo tanto los valores de s y t no existen. Por consiguiente, las rectas L_1 y L_2 no se intersecan.

c) Determine la ecuación vectorial del plano que contiene a L_1 y es paralelo a L_2.

Respuesta:
Para determinar la ecuación vectorial de un plano, se necesita un punto por donde pasa el plano y dos vectores linealmente independientes que se encuentren en el plano.

Como el plano contiene a L_1, el vector director de esta recta, i.e. el vector $(2, -1, 1)$ está dentro del plano. Por otra parte, como L_2 es paralelo al plano, su vector director, i.e. el vector $(1, 2, 2)$ tiene la dirección del plano.

Entonces, si $(2, -1, 1)$ y $(1, 2, 2)$ no son paralelos y por lo tanto, si son linealmente independientes, entonces permiten generar al plano. Calculamos el ángulo entre estos dos vectores para verificar que no son paralelos,

$$cos\theta = \frac{(2, -1, 1) \cdot (1, 2, 2)}{||(2, -1, 1)||\,||(1, 2, 2)||} = \frac{2}{\sqrt{6} \cdot 3}$$

Como, $cos\theta \neq 1$ y $cos\theta \neq -1$ entonces los vectores no son paralelos. Por tanto, la ecuación vectorial del plano está dada por;

$$(x, y, z) = (0, 1, 2) + s(2, -1, 1) + t(1, 2, 2) \quad | \quad s, t \in \mathbb{R}$$

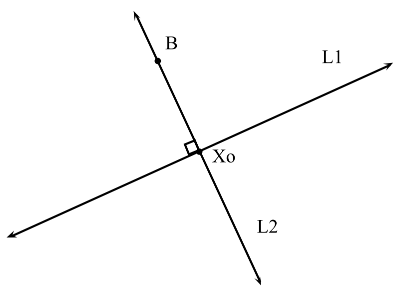
4. Considere la recta L_1 cuya ecuación es $(x, y, z) = (1 + t, 2 - t, -1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$ y el punto, $B = (1, -2, 4)$.

   a) Determine la ecuación de la recta L_2 que pasa por B y corta perpendicularmente a L_1.

   Respuesta:
   La ecuación vectorial de L_1 es;

$$(x, y, z) = (1, 2, -1) + t(1, -1, 1) \quad | \quad t \in \mathbb{R}$$

Ahora, sea $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ el punto donde L_2 corta perpendicularmente a L_1.



Entonces, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, -1) + s(1, -1, 1)$ y además, se debe cumplir que $\overrightarrow{BX_0} = X_0 - B = (x_0, y_0, z_0) - (1, -2, 4)$ es perpendicular a L_1 y por tanto a su vector director $(1, -1, 1)$. Entonces,

$$\Big[(x_0, y_0, z_0) - (1, -2, 4)\Big] \cdot (1, -1, 1) = 0 \Leftrightarrow \Big[(1, 2, -1) + s(1, -1, 1) - (1, -2, 4)\Big] \cdot (1, -1, 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Big[(0, 4, -5) + s(1, -1, 1)\Big] \cdot (1, -1, 1) = 0 \Leftrightarrow (0, 4, -5) \cdot (1, -1, 1) + s(1, -1, 1) \cdot (1, -1, 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -9 + 3s = 0 \Leftrightarrow 3s = 9 \Leftrightarrow s = 3$$

Entonces, $X_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, -1) + 3 \cdot (1, -1, 1) = (4, -1, 2)$. Por tanto, $\overrightarrow{BX_0} = X_0 - B = (4, -1, 2) - (1, -2, 4) = (3, 1, -2)$ es vector director de L_2, y la ecuación de L_2 es entonces,

$$(x, y, z) = (1, -2, 4) + t(3, 1, -2) \mid t \in \mathbb{R}$$

b) Determine la distancia de B a L_1.

Respuesta:
Por la parte a), como el punto $X_0 = (4, -1, 2)$ es tal que el vector que va de B a X_0 corta perpendicularmente a la recta L_1, entonces el la longitud del segmento formado por el vector $\overrightarrow{BX_0} = (3, 1, -2)$ representa la distancia de B a L_1, ya que la menor distancia es siempre el segmento perpendicular. Entonces, $d(B, L_1) = \left\|\overrightarrow{BX_0}\right\| = \|(3, 1, -2)\| = \sqrt{14}$ es la distancia de B a L_1.

c) Determine la ecuación normal del plano que contiene a las rectas L_1 y L_2.

Respuesta:
Como L_1 y L_2 son perpendiculares, sus vectores directores lo son también, entonces permiten generar al plano que pasa por L_1 y L_2 ya que no son vectores paralelos. Entonces, si η es ortogonal a los vectores directores de las rectas, i.e. a $(1, -1, 1)$ y $(3, 1, -2)$, es por consiguiente un vector normal al plano.
Entonces, para obtener un vector ortogonal a $(1, -1, 1)$ y $(3, 1, -2)$,

$$(1, -1, 1) \times (3, 1, -2) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1, 5, 4)$$

Y tomamos entonces, $\eta = (1, 5, 4)$. Ahora, nótese que el punto $(1, 2, -1) \in L_1$ está en el plano, por lo que la ecuación normal del plano satisface:

$$(x, y, z) \cdot (1, 5, 4) = (1, 2, -1) \cdot (1, 5, 4) \Leftrightarrow x + 5y + 4z = 7$$

Por lo tanto, la ecuación normal del plano es: $x + 5y + 4z = 7$.

5. Dada la recta L, cuyas ecuaciones simétricas son: $\frac{x-2}{-3} = y = \frac{z}{5}$.

a) Determine la ecuación normal del plano que contiene al punto $(2, -6, 1)$ y que también contiene a la recta L.

Respuesta:
Las ecuaciones paramétricas y vectorial de la recta L son;

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = t \\ z = 5t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x, y, z) = P + t\overrightarrow{v} = (2, 0, 0) + t(-3, 1, 5)$$

Note que si $Q = (2, -6, 1)$, entonces Q no está en la recta L, pues sustituyendo a Q en las ecuaciones simétricas, se obtiene una contradicción; $\frac{2-2}{-3} \neq -6 =\neq \frac{1}{5}$.

Entonces sean $A = (2, 0, 0)$ y $B = (2, 0, 0) + (-3, 1, 5) = (-1, 1, 5)$ dos puntos de L. Entonces los vectores, $\overrightarrow{QA}$ y $\overrightarrow{QB}$ no son paralelos y están dentro del plano buscado.

Por tanto un vector normal al plano es $\eta = \overrightarrow{QA} \times \overrightarrow{QB}$, donde

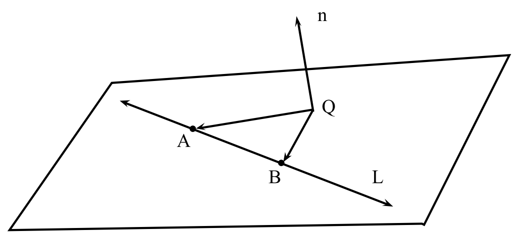
$$\overrightarrow{QA} = A - Q = (2, 0, 0) - (2, -6, 1) = (0, 6, -1)$$
$$\overrightarrow{QB} = B - Q = (-1, 1, 5) - (2, -6, 1) = (-3, 7, 4)$$

$$\Rightarrow \quad \eta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 6 & -1 \\ -3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = (31, 3, 18)$$

Entonces la ecuación normal del plano satisface:

$$X \cdot \eta = Q \cdot \eta \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (31, 3, 18) = (2, -6, 1) \cdot (31, 3, 18)$$
$$\Leftrightarrow \quad 31x + 3y + 18z = 62$$

La ecuación normal del plano es entonces, $31x + 3y + 18z = 62$.



b) Verifique que la recta L_1, cuya ecuación es $(x, y, z) = (2, 1, 1) + t(-3, 1, 5)$, $t \in \mathbb{R}$, es paralela al plano encontrado en a).

Respuesta:
Para que la recta L_1 sea paralela al plano, debe ser perpendicular al vector normal del plano. De modo que el vector director de la recta L_1, i.e. el vector $(-3, 1, 5)$ debe ser perpendicular al vector $\eta = (31, 3, 18)$. Se puede verificar que efectivamente son perpendiculares, pues por el producto interior escalar, $(-3, 1, 5) \cdot (31, 3, 18) = 0$, entonces son perpendiculares.

Por el razonamiento anterior, entonces L_1 es paralela al plano $31x + 3y + 18z = 62$, encontrado en la parte a)

6. Dado el plano π, cuya ecuación normal es: $31x + 3y + 18z = 62$.

   a) Calcule la distancia del plano π, a la recta L_1, cuya ecuación vectorial es $(x, y, z) = (2, 1, 1) + t(-3, 1, 5)$ $t \in \mathbb{R}$. Incluya un esquema geométrico como parte de la justificación de su procedimiento de cálculo.

Respuesta:
Por la parte b) de la pregunta 2, la recta L_1 y el plano π son paralelos. Entonces, para calcular la distancia de la recta L_1 al plano π, basta calcular la distancia de un punto de la recta al plano, pues la distancia es constante al ser ambos paralelos.

Tome $Q = (2, 1, 1)$ que está en L_1. El punto, $P = (2, -6, 1)$ está en el plano, por la pregunta 2 parte a). Entónces, la fórmula de distancia de Q al plano π está dada por,

$$d(Q, \pi) = \frac{|(P - Q) \cdot \eta|}{\|\eta\|}$$

donde, $\|\eta\| = \sqrt{1294}$, $P - Q = (2, -6, 1) - (2, 1, 1) = (0, -7, 0)$, $(P - Q) \cdot \eta = (0, -7, 0) \cdot (31, 3, 18) = -21$. Entonces,

$$d(Q, \pi) = \frac{|-21|}{\sqrt{1294}} = \frac{21}{\sqrt{1294}}$$

es la distancia de la recta L_1 al plano π.

b) Determine la ecuación de la recta L_2 que pasa por el punto $(-1, 2, 6)$ y que es perpendicular al plano π.

Respuesta:
Como la recta L_2 es perpendicular al plano π, entonces su vector director es paralelo al vector normal al plano, por lo tanto, podemos tomar como vector director de la recta L_2 al vector $(31, 3, 18)$, y como la recta L_2 pasa por el punto $(-1, 2, 6)$, entonces la ecuación vectorial de la recta es:

$$L_2 : \quad (x, y, z) = (-1, 2, 6) + t(31, 3, 18) \mid t \in \mathbb{R}$$

c) Determine el punto de intersección de la recta L_2 con el plano π.

Respuesta:
La ecuación vectorial de la recta L_2 determina un sistema de 4 variables con las tres ecuaciones:

$$\begin{array}{cccccc} x & & & -31t & = & -1 \\ & y & & -3t & = & 2 \\ & & z & -18t & = & 6 \end{array}$$

y el plano π tiene la ecuación normal con tres variables, $31x + 3y + 18z = 62$. Entonces la recta L_2 y el plano π forman el siguiente sistema aumentado, cuya solución es la intersección de ambos;

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -31 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 6 \\ 31 & 3 & 18 & 0 & 62 \end{array}\right) \begin{array}{c} -31f_1 + f_4 \\ \longrightarrow \\ -3f_2 + f_4 \\ -18f_3 + f_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -31 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1294 & -21 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{1294}f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -31 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -18 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-21}{1294} \end{array}\right) \xrightarrow{31f_4 + f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1945}{1294} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2525}{1294} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3693}{647} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-21}{1294} \end{array}\right)$$

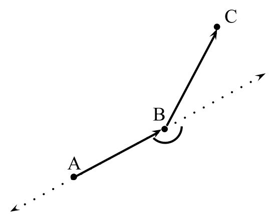
Entonces, la intersección de la recta y el plano, es el punto $\left(\frac{-1945}{1294}, \frac{2525}{1294}, \frac{3693}{647}\right)$.

7. Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A = (0, 1, 3)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (1, 1, 2)$ y $Q = (0, 2, -2)$.

   a) Verifique que los puntos A, B y C no son colineales.

   Respuesta:
   Para que A, B y C no sean colineales, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ no deben de estar en la misma recta, i.e. no deben de ser paralelos.

   En la figura se representa la idea geométrica.



   Sea θ el ángulo entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, donde $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 0, 1) - (0, 1, 3) = (1, -1, -2)$ y $\overrightarrow{BC} = C - B = (1, 1, 2) - (1, 0, 1) = (0, 1, 1)$. Entonces, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -3$, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{6}$ y $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{2}$. Entonces,

$$cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \frac{-3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-3}{2\sqrt{3}}$$

   Y como $cos\theta \neq 1$ y $cos\theta \neq -1$, entonces los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ no son paralelos, por lo tanto los puntos A, B y C no son colineales.

   b) Determine la ecuación normal del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

   Respuesta:
   Para la ecuación normal del plano π, necesitamos un vector η normal al plano y un punto por donde pase el plano. Primero vamos a determinar un vector normal al plano. Note que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son no paralelos entre sí, pues por la parte a), no se encuentran en la misma recta, y que además están en el plano π, puesto que los puntos A, B, y C están en el plano. Entonces, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ generan la dirección del plano. Un vector normal al plano es entonces el vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$

Entonces, podemos tomar como vector normal al plano π, al vector $\eta = (1, -1, 1)$. Como el punto A pertenece al plano, entonces la ecuación del plano satisface:

$$(x, y, z) \cdot (1, -1, 1) = (0, 1, 3) \cdot (1, -1, 1) \quad \Leftrightarrow \quad x - y + z = 2$$

Entonces la ecuación normal del plano π es $x - y + z = 2$.

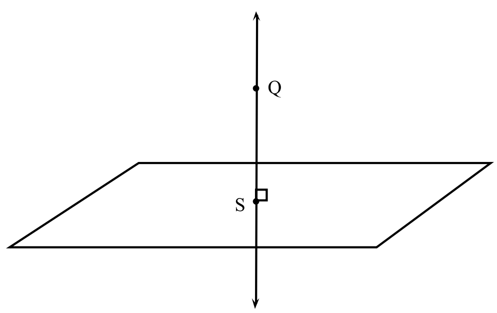
c) Determine la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto Q y que es perpendicular al plano π.

Respuesta:
Como la recta es perpendicular al plano π, un vector paralelo a la recta es el vector η normal al plano, por lo que η se puede utilizar como vector director de la recta. Y como la recta pasa por el punto Q, la ecuación vectorial de la recta es:

$$\left\{X \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; X = Q + t\eta, t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x, y, z) = (0, 2, -2) + t(1, -1, 1), t \in \mathbb{R}\right\}$$

d) Determine el punto en el plano π más cercano al punto Q.

Respuesta:
Recordemos que por teorema, la distancia más corta de un punto Q al plano π es la longitud del segmento perpendicular que une a Q con el plano π. Entonces, el punto más cercano de π a Q, es el punto S en donde la recta calculada en la parte c), interseca a π, esto porque la recta es perpendicular al plano π. Veáse la figura.



Las ecuaciones de la recta son:

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & -t & = & 0 \\ & y & & +t & = & 2 \\ & & z & -t & = & -2 \end{array}$$

y la ecuación del plano es $x - y + z = 2$. Por lo que la intersección de la recta y el plano, corresponden a la solución al sistema;

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2+f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_3+f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} f_4+f_1 \\ \longrightarrow \\ -f_4+f_2 \\ f_4+f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Por tanto, el punto donde se intersecan el plano y la recta es el punto $S = (2, 0, 0)$, y es el punto del plano π más cercano al punto Q.

e) Calcule la distancia del punto Q al plano π.

Respuesta:
Como la menor distancia es la perpendicular, entonces de la parte d), se tiene que;

$$d(Q, \pi) = \|Q - S\| = \|(0, 2, -2) - (2, 0, 0)\| = \|(-2, 2, -2)\| = 2\sqrt{3}$$

Otra manera de calcular la distancia es con la fórmula,

$$d(Q, \pi) = \frac{|(P - Q) \cdot \eta|}{\|\eta\|} \quad \text{donde } P \text{ es un punto del plano}$$

Tomamos como punto del plano al punto A, entonces $A - Q = (0, 1, 3) - (0, 2, -2) = (0, -1, 5)$, $(A - Q) \cdot \eta = (0, -1, 5) \cdot (1, -1, 1) = 6$ y $\|\eta\| = \sqrt{3}$, de modo que $d(q, \pi) = 2\sqrt{3}$.

De manera que con ambos métodos, se obtiene que la distancia de Q al plano π es $2\sqrt{3}$.

8. *a*) (5 puntos) Halle la ecuación vectorial de la línea recta, l_1, que contiene a los puntos $P(4, 6, 7)$ y $Q(3, 6, 9)$.

Respuesta:
Como P y Q están en la recta, el vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene la dirección de la recta. Entonces,

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3, 6, 9) - (4, 6, 7) = (-1, 0, 2)$$

puede ser usado como vector director de la recta l_1. Además, l_1 pasa por el punto P, de manera que la ecuación vectorial de l_1 toma la forma,

$$(x, y, z) = (4, 6, 7) + t(-1, 0, 2) \quad t \in \mathbb{R}$$

b) Muestre que la línea recta, l_2, dada por las ecuaciones simétricas

$$\frac{x-1}{7} = y - 3 = \frac{5-z}{3},$$

no interseca a l_1.

Respuesta:
De las ecuaciones simétricas, la ecuación vectorial de l_2 es $(x, y, z) = (1, 3, 5) + s(7, 1, -3)$, $s \in \mathbb{R}$ y por la parte a), la ecuación vectorial de l_1 es, $(x, y, z) = (4, 6, 7) + t(-1, 0, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Las dos rectas se intersecan si existen valores de s y t tales que,

$$\begin{aligned}(1,3,5) + s(7,1,-3) &= (4,6,7) + t(-1,0,2)\\ \Leftrightarrow (7s + t, s, -3s - 2t) &= (3,3,2)\end{aligned}$$

que es equivalente al sistema,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ -3 & -2 & 2\end{array}\right) \underset{3f_2+f_3}{\overset{-7f_2+f_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -18\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & -2 & 11\end{array}\right) \overset{2f_1+f_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -18\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -25\end{array}\right)$$

que tiene una ecuación inconsistente, y por tanto, no tiene solución para s y t. De modo que las rectas l_1 y l_2 no se intersecan.

c) Halle ecuaciones normales para dos planos paralelos, π_1 y π_2, que contienen a las rectas l_1 y l_2, respectivamente.

Respuesta:
Como los planos π_1 y π_2 son paralelos, entonces sus vectores normales son paralelos, y se puede tomar el mismo vector normal para describir la ecuación de ambos.

Ahora, como π_1 contiene a l_1 y π_2 contiene a l_2, entonces necesitamos un vector normal a ambas rectas. Si $u = (-1, 0, 2)$ y $v = (7, 1, -3)$ son los vectores directores de l_1 y l_2 respectivamente, note que no son paralelos, por lo que las rectas l_1 y l_2 tampoco lo son, y entonces tomamos como vector normal al vector $u \times v$:

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ -1 & 0 & 2\\ 7 & 1 & -3\end{vmatrix} = (-2, 11, -1)$$

Entonces, $\eta = (-2, 11, -1)$ es un vector normal a los planos π_1 y π_2.
Como π_1 contiene a l_1, entonces el punto $(4, 6, 7)$ está en π_1, por lo que π_1 tiene ecuación normal:

$$\begin{aligned}(x,y,z)\cdot(-2,11,-1) &= (4,6,7)\cdot(-2,11,-1)\\ \Leftrightarrow -2x + 11y - z &= 51\end{aligned}$$

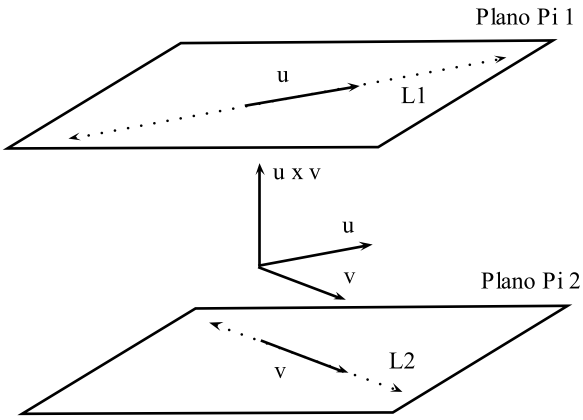
Entonces la ecuación normal de π_1 es $-2x + 11y - z = 51$.

Como π_2 contiene a l_2, el punto $(1, 3, 5)$ está en π_2, por lo que π_2 tiene ecuación normal:

$$(x, y, z) \cdot (-2, 11, -1) = (1, 3, 5) \cdot (-2, 11, -1)$$
$$\Leftrightarrow -2x + 11y - z = 26$$

Entonces la ecuación normal de π_2 es $-2x + 11y - z = 26$.

El argumento geométrico del procedimiento anterior se ilustra en la siguiente figura:



d) Determine la distancia entre los planos π_1 y π_2.

Respuesta:
Como los planos π_1 y π_2 son paralelos, basta con calcular la distancia entre un punto de π_1 y el plano π_2.

El punto $A = (4, 6, 7)$ está en π_1. El punto, $B = (1, 3, 5)$ está en π_2 y el vector normal de π_2 es $\eta = (-2, 11, -1)$. Entonces se tiene la fórmula de distancia,

$$d(A, \pi_2) = \frac{|\ (B - A) \cdot \eta\ |}{\|\eta\|}$$

donde, $B - A = (1, 3, 5) - (4, 6, 7) = (-3, -3, -2)$ y $(B - A) \cdot \eta = (-3, -3, -2) \cdot (-2, 11, -1) = -25$ y $\|\eta\| = 3\sqrt{14}$.

Entonces, $d(A, \pi_2) = \frac{25}{3\sqrt{14}}$ es la distancia entre π_1 y π_2.

9. Considere las lineas rectas l_1 y l_2, dadas por las ecuaciones

$$\begin{array}{lclclclclcl} l_1 & : & x & = & 2 + 8t, & y & = & 6 - 8t, & z & = & 10t \\ l_2 & : & x & = & 3 + 8t, & y & = & 5 - 3t, & z & = & 6 + t \end{array}$$

a) Muestre que l_1 y l_2, no pueden estar en un mismo plano.

Respuesta:
Note que las ecuaciones vectoriales de l_1 y l_2 son:

$$\begin{array}{lclclcl} l_1 & : & (x,y,z) & = & P+tv & = & (2,6,0)+t(8,-8,10) \\ l_2 & : & (x,y,z) & = & Q+tw & = & (3,5,6)+t(8,-3,1) \end{array}$$

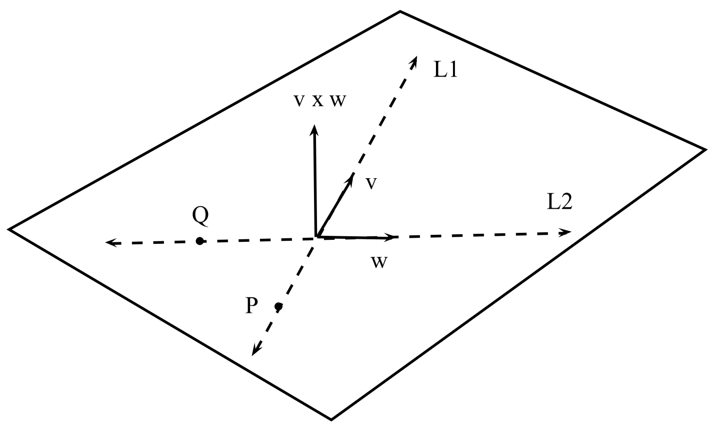
Ahora, note además que los vectores directores v y w, de l_1 y l_2 respectivamente, no son paralelos.

Vamos a mostrar que si l_1 y l_2 estuvieran en el mismo plano, entonces esto nos lleva a una contradicción. Específicamente, vamos a ver que la contradicción se presenta porque hay dos posibles ecuaciones normales para este plano que contiene a l_1 y a l_2, y las cuales se contradicen entre sí.

Entonces, suponga que l_1 y l_2 se encuentran en el mismo plano. En ese caso, los vectores directores v y w están en el plano, y como no son paralelos, generan la dirección del plano. Entonces el vector, $v \times w$ es normal al plano, donde:

$$v \times w = (8,-8,10) \times (8,-3,1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 8 & -8 & 10 \\ 8 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (22,72,40) = 2(11,36,20)$$

Podemos tomar el vector más simple, $n = (11,36,20)$ que es paralelo a $v \times w = (22,72,40)$, y por tanto es normal al plano. Véase la figura.



Como l_1 está en el plano, entonces $P = (2,6,0)$ es un punto del plano, por lo que se puede obtener la ecuación normal del plano:

$$(x,y,z) \cdot (11,36,20) = (2,6,0) \cdot (11,36,20) \quad \Leftrightarrow \quad 11x + 36y + 20z = 238$$

Pero como l_2 también está en el plano, el punto, $Q = (3,5,6)$ pertenece al plano, por lo que se puede obtener la ecuación normal del plano:

$$(x, y, z) \cdot (11, 36, 20) = (3, 5, 6) \cdot (11, 36, 20) \quad \Leftrightarrow \quad 11x + 36y + 20z = 333$$

Entonces el plano que contiene tanto a l_1 como a l_2, tiene dos ecuaciones que se contradicen entre sí. Por lo tanto, dicho plano no puede existir. Entonces, hemos probado que l_1 y l_2 no pueden estar en el mismo plano.

b) Determine una ecuación cartesiana para el plano π_1 que contiene a l_1 y es paralelo a l_2.

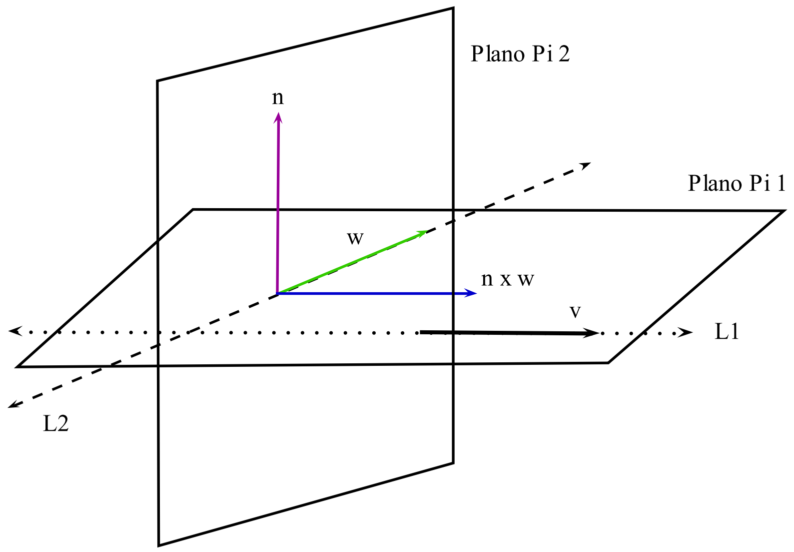
Respuesta:
En los cálculos de la parte a), el vector $n = (11, 36, 20)$ es normal al plano que contiene a l_1 y que es paralelo a l_2. Donde aqui, el plano es paralelo a l_2 porque tiene la dirección dada por los vectores v de l_1 y w de l_2.

Se obtuvo la ecuación,

$$\pi_1 \quad : \quad 11x + 36y + 20z \quad = \quad 238$$

c) Determine una ecuación cartesiana para el plano π_2 que contiene a l_2 y es perpendicular al plano π_1.

Respuesta:
Para la siguiente interpretación geométrica, refierase a la siguiente figura.



Como el plano π_2 contiene a l_2, en particular, contiene al vector w director de l_2. Ahora, como π_2 es un plano perpendicular a π_1, y como el vector n es normal a π_1, entonces n es un vector paralelo al plano π_2, y como los vectores n y w son perpendiculares, entonces no son paralelos, por lo que generan la dirección del plano π_2. Entonces el vector, $n \times w$, es un vector normal al plano π_2. Donde,

$$n \times w = (11, 36, 20) \times (8, -3, 1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 11 & 36 & 20 \\ 8 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-96, -149, 321)$$

Como π_2 contiene a l_2, entonces el punto $Q = (3, 5, 6)$ está en π_2. Entonces la ecuación normal del plano π_2 se obtiene de:

$$(x, y, z) \cdot (96, 149, -321) = (3, 5, 6) \cdot (96, 149, -321) \quad \Leftrightarrow \quad 96x + 149y - 321z = -893$$

Entonces la ecuación de π_2 es,

$$\pi_2 \quad : \quad 96x + 149y - 321z \quad = \quad -893$$

d) Determine una ecuación vectorial para la línea l_3 correspondiente a la intersección del plano π_1 con el plano π_2.

Respuesta:
La recta l_3 es la solución al sistema que se forma con las ecuaciones normales de los planos π_1 y π_2. Entonces tenemos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 36 & 20 & 238 \\ 96 & 149 & -321 & -893 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{11}f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{36}{11} & \frac{20}{11} & \frac{238}{11} \\ 96 & 149 & -321 & -893 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-96f_1 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{36}{11} & \frac{20}{11} & \frac{238}{11} \\ 0 & \frac{-1817}{11} & \frac{-5451}{11} & \frac{-32671}{11} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-11}{1817}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{36}{11} & \frac{20}{11} & \frac{238}{11} \\ 0 & 1 & 3 & \frac{32671}{1817} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{-36}{11}f_2 + f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8 & \frac{-743710}{19987} \\ 0 & 1 & 3 & \frac{32671}{1817} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x & = & 8z - \frac{-743710}{19987} \\ y & = & -3z + \frac{32671}{1817} \end{array}$$

Entonces, si $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, la ecuación vectorial de l_3 es:

$$l_3 \quad : \quad (x, y, z) = \left(\frac{-743710}{19987}, \frac{32671}{1817}, 0\right) + t(8, -3, 1)$$

e) Halle las coordenadas del punto, R, correspondiente a la intersección de l_1 con l_3 y calcule la distancia de R a l_2.

Respuesta:
Si R es el punto de intersección de l_1 y l_3, entonces debe de satisfacer las ecuaciones de l_1 y l_3, para algunos valores de s y t,

$$\begin{array}{rcl} l_1 & : & (x, y, z) = (2, 6, 0) + s\,(8, -8, 10) \\ l_3 & : & (x, y, z) = \left(\frac{-743710}{19987}, \frac{32671}{1817}, 0\right) + t(8, -3, 1) \end{array}$$

Entonces, $R = (x, y, z)$, debe cumplir que:

$$(2, 6, 0) + s\,(8, -8, 10) = \left(\frac{-743710}{19987}, \frac{32671}{1817}, 0\right) + t(8, -3, 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (8s - 8t, -8s + 3t, 10s - t) = \left(\frac{-783684}{19987}, \frac{21769}{1817}, 0\right)$$

Que es equivalente al sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & -8 & \frac{-783684}{19987} \\ -8 & 3 & \frac{21769}{1817} \\ 10 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} f_1+f_2 \\ \longrightarrow \\ \frac{1}{10}f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 8 & -8 & \frac{-783684}{19987} \\ 0 & -5 & \frac{-544225}{19987} \\ 1 & \frac{-1}{10} & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -8f_3+f_1 \\ \longrightarrow \\ \frac{-1}{5}f_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{-36}{5} & \frac{-783684}{19987} \\ 0 & 1 & \frac{108845}{19987} \\ 1 & \frac{-1}{10} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{36}{5}f_2+f_1 \\ \longrightarrow \\ \frac{1}{10}f_2+f_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{108845}{19987} \\ 1 & 0 & \frac{1979}{3634} \end{array}\right)$$

Entonces, $s = \frac{1979}{3634}$ y $t = \frac{108845}{19987}$. Por tanto, sustituyendo ya sea s en l_1 o bien t en l_3, se obtiene, $R = \left(\frac{11550}{1817}, \frac{2986}{1817}, \frac{9895}{1817}\right)$ es el punto de intersección de las rectas l_1 y l_3.

Finalmente, calculamos la distancia R a l_2. Tenemos la fórmula de distancia, con $Q = (3,5,6) \in l_2$,

$$d(R, l_2) = \left\| \overrightarrow{QR} - Proy_w\, \overrightarrow{QR} \right\|$$

donde $\overrightarrow{QR} = R - Q = \left(\frac{11550}{1817}, \frac{2986}{1817}, \frac{9895}{1817}\right) - (3,5,6) = \left(\frac{6099}{1817}, \frac{-6099}{1817}, \frac{-1007}{1817}\right)$. Entonces,

$$\begin{aligned} d(R, l_2) &= \left\| \left(\frac{6099}{1817}, \frac{-6099}{1817}, \frac{-1007}{1817}\right) - \left(\frac{7144}{1817}, \frac{-2679}{1817}, \frac{893}{1817}\right) \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{4406}{1817}, \frac{5665}{1817}, \frac{9002}{1817}\right) \right\| = \frac{\sqrt{132541065}}{1817} \end{aligned}$$

10. Halle una ecuación vectorial para el plano que contiene al punto $P(2,-1,4)$ y es perpendicular a la recta de intersección de los planos $4x + 2y + 2z + 1 = 0$ y $3x + 6y + 3z - 7 = 0$

Respuesta:

Sea M el plano buscado. Si,

$$\begin{aligned} M_1 :&\ \ 4x + 2y + 2z = -1 \\ M_2 :&\ \ 3x + 6y + 3z = 7 \end{aligned}$$

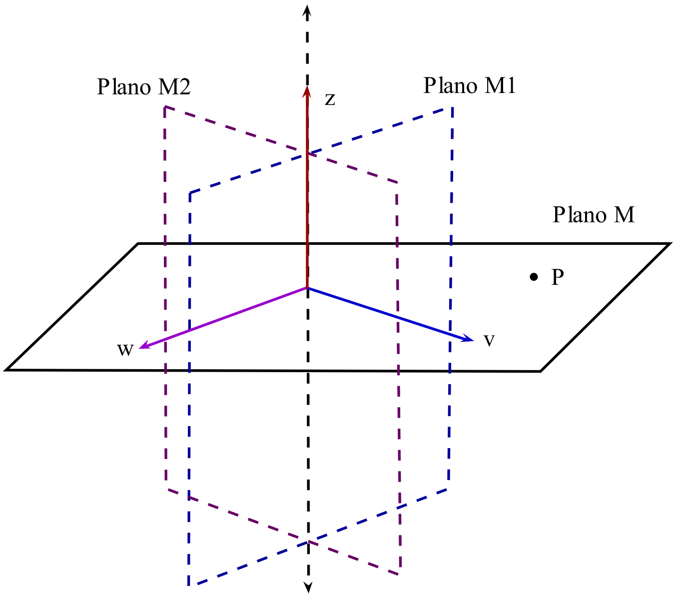
son dos planos, entonces los vectores $v = (2,1,1)$ y $w = (1,2,1)$ son normales a los planos M_1 y M_2 respectivamente.

Sea z el vector director de la recta de intersección de los planos M_1 y M_2, entonces, z es un vector normal a M, pues z está en M_1 y en M_2 y ambos son perpendiculares a M. Como $v \perp z$, pues z está en M_1, y $w \perp z$, pues z está en M_2. Entonces, v, w están en M, y como no son paralelos, sirven como vectores directores del plano M.

La ecuación vectorial de M es:

$$M : \ \ (x,y,z) = P + tv + sw = (2,-1,4) + t(2,1,1) + s(1,2,1) \ \ t, s \in \mathbb{R}$$

En la siguiente figura se presenta la interpretación geométrica para obtener la ecuación del plano M.



11. Considere las lineas rectas

$$l_1 = \{(1-2t, 2-t, 3-3t) \mid t \in \mathbb{R}\} \qquad l_2 = \{(-1+4t, 2-t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

y el plano $\pi = \{(x, y, z) \mid -2x - 5y + 4z = 0\}$.

a) Determine si las líneas rectas l_1 y l_2 se intersecan y en caso afirmativa halle las coordenadas del punto de intersección.

Respuesta:
La intersección de l_1 y l_2 son todos los vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que cumplen con ls ecuaciones de l_1 y l_2 al mismo tiempo. Por tanto, si (x, y, z) está en la intersección, podemos igualar las ecuaciones para encontrar los valores correspondientes de s y t.

$$\begin{aligned}
(1,2,3) + t(-2,-1,-3) &= (-1,2,2) + s(4,-1,0)\\
\Leftrightarrow\ (-2t,-t,-3t) - (4s,-s,0) &= (-1,2,2) - (1,2,3)\\
\Leftrightarrow\ (-2t-4s, -t+s, -3t) &= (-2,0,-1)
\end{aligned}$$

Igualamos los vectores entrada por entrada y se obtiene el sistema:

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcrcr} -2t & - & 4s & = & -2\\ -t & + & s & = & 0\\ -3t & & & = & -1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -2\\ -1 & 1 & 0\\ -3 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-f_2\\ -f_3}]{\frac{-1}{2}f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-3f_1+f_3]{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & -6 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-2f_2+f_3}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-1}{3}f_2}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_2+f_1}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces $t = \frac{1}{3}$ y $s = \frac{1}{3}$. Por tanto, el único punto de intersección se obtiene al sustituir esos valores en las ecuaciones de las lineas rectas, es decir, la intersección es el punto:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \frac{1}{3}(-2, -1, -3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 2\right)$$

b) Calcule la distancia del punto $E = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 2\right)$ al plano π.

Respuesta:
El vector normal al plano π es $\overrightarrow{n} = (-2, -5, 4)$ y note que el punto $P = (0, 0, 0)$ está en π. Por la fórmula de distancia de un punto a un plano

$$d(E, \pi) = \frac{\left|(P - E) \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\left\|\overrightarrow{n}\right\|} = \frac{\left|-E \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\left\|\overrightarrow{n}\right\|}$$

con $\left\|\overrightarrow{n}\right\| = \sqrt{45}$ y $-E \cdot \overrightarrow{n} = 1$. Entonces, $d(E, \pi) = \frac{1}{\sqrt{45}}$.

c) Encuentre todos los puntos de la línea recta l_1 cuya distancia al plano π sea $\sqrt{45}$.

Respuesta:
La distancia entre un punto (x, y, z) fuera del plano π y el plano π es la longitud del segmento perpendicular que va del punto al plano. Sea $A = (x, y, z)$ un punto tal que la distancia con respecto al plano π es $\sqrt{45}$. Por la fórmula de distancia, y tomando en cuenta que el punto $P = (0, 0, 0)$ está en π,

$$d(A, \pi) = \frac{\left|(P - A) \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\left\|\overrightarrow{n}\right\|} = \frac{\left|-A \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\left\|\overrightarrow{n}\right\|}$$

Ahora como $A \in l_1$, existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $A = (1 - 2t, 2 - t, 3 - 3t)$. Entonces,

$$-A \cdot \overrightarrow{n} = (2t - 1, t - 2, 3t - 3) \cdot (-2, -5, 4) = 3t$$

Por tanto, $\sqrt{45} = d(A, \pi) = \frac{\left|3t\right|}{\sqrt{45}} \Rightarrow \left|t\right| = 15$. Por tanto, los dos puntos que están a distancia $\sqrt{45}$ de π son:

$$(x_1, y_1, z_1) = (1, 2, 3) + 15(-2, -1, -3) = (-29, -13, -42)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (1, 2, 3) - 15(-2, -1, -3) = (31, 17, 48)$$

12. Considere los planos $\pi_1 : \;\; 2x - y + z = 1$ y $\pi_2 : \;\; 3x + y + z = 2$.

a) Determine una ecuación vectorial para la línea de intersección de los planos π_1 y π_2.

Respuesta:
Todos los puntos de la línea de intersección de π_1 y π_2 deben cumplir con ambas ecuaciones al mismo tiempo. Entonces, deben ser solución al sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{5}f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \Leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

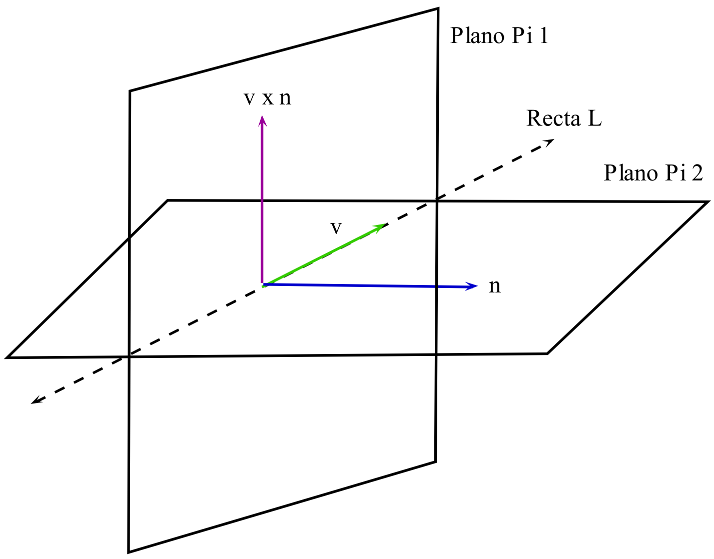
La solución al sistema es $x + \frac{2}{5}z = \frac{3}{5}$, $y - \frac{1}{5}z = \frac{1}{5}$. Y tomando $z = t$, la intersección de los planos es el conjunto de puntos de la forma,

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5}t, \frac{1}{5} + \frac{1}{5}t, t\right) \quad t \in \mathbb{R}$$

b) Halle una ecuación vectorial para el plano π_1.
Respuesta:
Necesitamos un punto de π_1 y dos vectores directores (es decir, dos vectores dentro del plano π_1 que no sean paralelos).

Sea L la recta de intersección de π_1 y π_2. Entonces, como la recta L está en π_1, el vector director de L está en π_1. El vector director de L, según la parte a), es $\left(\frac{-2}{5}, \frac{1}{5}, 1\right) = \frac{1}{5}(-2, 1, 5)$. Entonces podemos tomar al vector $\overrightarrow{v} = (-2, 1, 5)$ como uno de los directores del plano π_1.

Como $\overrightarrow{n} = (2, -1, 1)$ es vector normal a π_1, es ortogonal a v. Entonces el vector $\overrightarrow{v} x \overrightarrow{n}$, está en π_1 ya que es ortogonal a $\overrightarrow{n}$. Véase el dibujo para la interpretación geométrica.



Entonces, como $\overrightarrow{v} x \overrightarrow{n}$ está en π_1, y es ortogonal a $\overrightarrow{v}$, podemos tomar a $\overrightarrow{v}$ y a $\overrightarrow{v} x \overrightarrow{n}$ como vectores directores de π_1. Calculamos $\overrightarrow{v} x \overrightarrow{n}$:

$$\overrightarrow{v}x\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6(1,2,0)$$

Podemos tomar $\overrightarrow{w} = (1,2,0)$ ya que es paralelo a $\overrightarrow{v}x\overrightarrow{n}$ y por tanto apuntan a la misma dirección.

Como π_1 contiene a L y $P = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$ está en L, entonces P está en π_1. Una ecuación vectorial para π_1 es entonces

$$(x,y,z) = P + s\overrightarrow{v} + t\overrightarrow{w} = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0\right) + s\,(-2,1,4) + t\,(1,2,0)$$

13. Considere las rectas en $\mathbb{R}^3$ dadas por las siguientes ecuaciones

$$\begin{array}{rc} l_1: & \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{1-z}{2} \\ l_2: & (x,y,z) = (2-s, 3+s, s-1)\ , \quad s \in \mathbb{R} \end{array}$$

a) Demuestre que las rectas l_1 y l_2 no se intersecan y justifique por qué no son paralelas.

Respuesta:

Las ecuaciones paramétricas de l_1 son:

$$\begin{aligned} x &= 2t - 1 \\ y &= -t + 2 \\ z &= -2t + 1 \end{aligned}$$

Entonces la ecuación vectorial es

$$l_1: \quad (x,y,z) = (2t-1, -t+2, -2t+1)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

Un punto (x,y,z) está en la intersección de l_1 y l_2 sólamente si existen valores de s y t tales que:

$$(2t-1, -t+2, -2t+1) = (2-s, 3+s, s-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} 2t - 1 &= 2 - s \\ -t + 2 &= 3 + s \\ -2t + 1 & \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2t + s &= 3 \\ -t - s &= 1 \\ -2t - s &= -2 \end{aligned}$$

El anterior es un sistema con dos ecuaciones incompatibles (la (1) y la (3)), entonces no tiene solución. Por tanto l_1 y l_2 no se intersecan.

El vector director de l_1 es $v = (2,-1,-2)$ y el de l_2 es $w = (-1,1,1)$ y uno de ellos no es el múltiplo por un escalar del otro, por lo tanto no son paralelos, y de esto se sigue que l_1 y l_2 no son paralelas.

b) Determine la ecuación vectorial de la recta l_3 que es perpendicular tanto a l_1 como a l_2 y que interseca tanto a l_1 como a l_2.

Respuesta:

Sea (x_1, y_1, z_1) el punto de intersección de l_1 con l_3 y (x_2, y_2, z_2) el punto de intersección de l_2 con l_3. Como $(x_1, y_1, z_1) \in l_1$, cumple con la ecuación: $(x_1, y_1, z_1) = (2t - 1, -t + 2, -2t + 1)$ para algún $t \in \mathbb{R}$. Como $(x_2, y_2, z_2) \in l_2$, cumple con la ecuación: $(x_2, y_2, z_2) = (2 - s, 3 + s, s - 1)$ para algún $s \in \mathbb{R}$. Si determinamos los valores de s y t podemos encontrar quienes son esos puntos.

Ahora, como los dos puntos están en l_3, entonces el vector $n = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1)$ es el vector director de l_3. Ahora, dicho vector toma la forma:

$$\begin{aligned}(x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) &= (2 - s, 3 + s, s - 1) - (2t - 1, -t + 2, -2t + 1)\\ &= (-2t - s + 3, t + s + 1, 2t + s - 2)\end{aligned}$$

Como l_1 y l_3 son ortogonales, sus vectores directores lo son, y por tanto se cumple con la ecuación:

$$n \cdot v = (-2t - s + 3, t + s + 1, 2t + s - 2) \cdot (2, -1, -2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9t + 5s = 9$$

Similarmente, como l_2 y l_3 son ortogonales

$$n \cdot w = (-2t - s + 3, t + s + 1, 2t + s - 2) \cdot (-1, 1, 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5t + 3s = 4$$

Entonces s y t cumplen con las ecuaciones:

$$\begin{aligned}9t + 5s &= 9\\ 5t + 3s &= 4\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & 5 & 9\\ 5 & 3 & 4\end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{9}f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{9} & 1\\ 5 & 3 & 4\end{array}\right) \xrightarrow{-5f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{9} & 1\\ 0 & \frac{2}{9} & -1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{9}{2}f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{9} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{9}{2}\end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{5}{9}f_2 + f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{7}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{9}{2}\end{array}\right)$$

Entonces $t = \frac{7}{2}$, $s = -\frac{9}{2}$ y se tiene: $(x_1, y_1, z_1) = \left(6, -\frac{3}{2}, -6\right)$ y $(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{13}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-11}{2}\right)$. El vector director de l_3 es entonces $n = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$. Finalmente, como $\left(6, -\frac{3}{2}, -6\right)$ es un punto de l_3, entonces una ecuación para l_3 es la siguiente:

$$(x, y, z) = \left(6, -\frac{3}{2}, -6\right) + t\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

14. En $\mathbb{R}^3$, sean los planos con ecuaciones normales:

$$\Pi_1 : \quad 2x - 2z = -1 \qquad \Pi_2 : x - \tfrac{1}{2}y - z = 2$$

a) Determine la ecuación vectorial de la recta l de intersección de los planos Π_1 y Π_2.
Respuesta:

b) Sea $\Pi_3 : \quad -x + y - z = 1$ un plano de $\mathbb{R}^3$. Determine la ecuación normal del plano Π_4 que contiene a la recta l (de intersección de Π_1 y Π_2) y que es perpendicular a Π_3.
Respuesta:

c) Calcule la distancia del punto $(1, 2, 1)$ al plano Π_3.
Respuesta:

7. Espacios vectoriales reales

1. Sea $U = \left\{ \begin{pmatrix} c-b & b \\ c & c+b \end{pmatrix} \;\middle|\; b,c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M(2,\mathbb{R})$.

   a) Pruebe que U es un espacio vectorial de $M(2,\mathbb{R})$.

   Respuesta:
   Primero note que $U \neq \emptyset$ puesto que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$ ya que $\begin{pmatrix} 0-0 & 0 \\ 0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Sean $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix} \in U$, $c \in \mathbb{R}$. Entonces sus entradas cumplen,

   $$x_1 = z_1 - y_1 \quad x_2 = z_2 - y_2 \quad w_1 = z_1 + y_1 \quad w_2 = z_2 + y_2$$

   Y, verificamos que cumple con la propiedad de los subespacios vectoriales, i.e que toda combinación lineal de elementos del conjunto U pertenece nuevamente al conjunto U,

   $$c\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 + x_2 & cy_1 + y_2 \\ cz_1 + z_2 & cw_1 + w_2 \end{pmatrix}$$

   Note que por la relación entre los coeficientes de las matrices de U:

   $$cx_1 + x_2 = c(z_1 - y_1) + z_2 - y_2 = (cz_1 + z_2) - (cy_1 + y_2)$$
   $$cw_1 + w_2 = c(z_1 + y_1) + z_2 + y_2 = (cz_1 + z_2) + (cy_1 + y_2)$$

   Por lo tanto, los coeficientes de la matriz que es combinación lineal, cumplen con las propiedades de las matrices de U, entonces

   $$c\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix} \in U$$

   $\Rightarrow$ U es subespacio de $M(2,\mathbb{R})$.

   b) Determine una base para U.

   Respuesta:
   Note que para cada elemento de U, con $b,c \in \mathbb{R}$ arbitrarios,

   $$\begin{pmatrix} c-b & b \\ c & c+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ c & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b & b \\ 0 & b \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Sean $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Note que v_1 y v_2 son linealmente independientes, y como todo vector (en este caso un vector es una matriz) de U se puede escribir como combinación lineal de v_1 y v_2, entonces son una base para U. Escribimos, $\mathbb{B} = \{v_1, v_2\}$ es base de U.

c) Determine el vector de coordenadas de $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ en la base determinada en el punto b).

Respuesta:
Por la parte b), se puede observar que reemplazado los valores de b y c, se tiene,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2}a & 6 \\ 2 & a & -a & 4 \\ 4 & 10 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ y F_A el espacio vectorial generado por las filas de A.

a) Determine para qué valor de a se tiene que $dimF_A = 2$.

Respuesta:
Una base para el espacio fila de A, F_A son los vectores de las filas no nulas de la forma escalonada reducidad de A. De modo que buscamos valores de a, tal que la forma escalonada reducida tenga dos filas no nulas exactamente.

$$A \xrightarrow[-4f_1+f_3]{-2f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2}a & 6 \\ 0 & a-4 & -2a & -8 \\ 0 & 2 & -2a & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[-f_3+f_2]{-f_3+f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2}a & 14 \\ 0 & a-6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2a & -8 \end{pmatrix} = B$$

Tomando, $a = 6$ en B,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \Leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 & 14 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Entonces, $dimF_A = 2$ si $a = 6$.

Ahora, si $a \neq 6$,

$$B \xrightarrow{\frac{1}{a-6}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2}a & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2a & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2f_2+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2}a & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{2}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2}a & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{-5}{2}f_3+f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 4 \end{pmatrix}$$

Entonces, $dimF_A = 3$ si $a \neq 6$.

b) Para el valor de a determinando en el punto anterior, ¿pertenece $(3,7,3,14)$ a F_A?

Respuesta:
Por la parte a), si $a = 6$, las dos filas no nulas de la forma escalonada reducida R de A son $v_1 = (1,0,15,14)$ y $v_2 = (0,1,-6,-4)$ son una base de F_A.

Entonces, $(3,7,3,14) \in F_A$ si se puede expresar como combinación lineal de v_1 y v_2. Es decir, si existen escalares c_1 y c_2 tales que, $(3,7,3,14) = c_1v_1 + c_2v_2 = c_1(1,0,15,14) + c_2(0,1,-6,-4)$. Esto determina el sistema,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 15 & -6 & 3 \\ 14 & -4 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow[-14f_1+f_4]{-15f_1+f_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -6 & -42 \\ 0 & -4 & -28 \end{array}\right) \xrightarrow[4f_2+f_4]{6f_2+f_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces, $c_1 = 3$ y $c_2 = 7$, por lo tanto, $(3,7,3,14) \in F_A$.

3. Dado el conjunto, $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a+b = c, a+d = b \right\}$

a) Pruebe que U es un subespacio vectorial de $M(2,\mathbb{R})$.

Respuesta:
Primeramente, observe que $U \neq \emptyset$, pues $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$.

Sean $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in U$, entonces sus coeficientes cumplen con las siguientes relaciones,

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = c_1 \\ a_1 + d_1 = b_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 + b_2 = c_2 \\ a_2 + d_2 = b_2 \end{cases}$$

Queremos probar que, si $z \in \mathbb{R}$, entonces $z\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in U$

$$z\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} za_1 + a_2 & zb_1 + b_2 \\ zc_1 + c_2 & zd_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

Y note que los coeficientes de esta matriz satisfacen las condiciones de U pues,

$$\text{Primera condición: } (za_1 + a_2) + (zb_1 + b_2) = z(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = zc_1 + c_2$$
$$\text{Segunda condición: } (za_1 + a_2) + (zd_1 + d_2) = z(a_1 + d_1) + (a_2 + d_2) = zb_1 + b_2$$

Por tanto, la matriz $z\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ pertenece a U, y entonces U es un subespacio de $M(2,\mathbb{R})$.

b) Determine una base para U.

Respuesta:
Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$ entonces, sus coeficientes cumplen que $c = a + b$, $d = b - a$. Por lo que todo vector (en este caso es una matriz) en U es de la forma,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & b \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Por tanto, como a y b son número cualesquiera, todo vetor en U es combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, los cuales son linealmente independientes, y entonces conforman una base de U.

Entonces, $\mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de U.

c) Calcule el vector de coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ en la base que encontró en b).

Respuesta:
Según lo encontrado en la parte b), entonces,

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\right]_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. Sea

$$S = Cl\{(1,1,1,1), (a-2, a-1, a, b), (a, a+1, a+2, 2b)\}$$

Determine condiciones sobre a y b para que el espacio S tenga dimensión igual a 2.

Respuesta:
Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-2 & a-1 & a & b \\ a & a+1 & a+2 & 2b \end{pmatrix}$. Entonces se tiene,

$$S = gen\{(1,1,1,1), (a-2, a-1, a, b), (a, a+1, a+2, 2b)\} = EspacioFila(A)$$

Como $dim(S) = dim(EspacioFila(A)) = RangoFila(A) = Rango(A)$. Buscamos valores a y b tales que $Rango(A) = 2$.

$$A \xrightarrow{2f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a+2 & b+2 \\ a & a+1 & a+2 & 2b \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2 + f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a+2 & b+2 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix} = B$$

Si $b = 2$ en B, se tiene,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a+2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a = 0$, con $b = 2$ en B,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, $Rango(A) = 2$ si $a = 0$ y $b = 2$.

Ahora, con $a \neq 0$ y $b = 2$ en B,

$$B \xrightarrow{-af_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & a-3 \\ 0 & 1 & 2 & 4-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y entonces, $Rango(A) = 2$ si $a \neq 0$ y $b = 2$.

Si $b \neq 2$ en B, entonces,

$$B \xrightarrow{\frac{1}{b-2}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a+2 & b+2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2f_3 + f_2]{-f_3 + f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & a+1 & a+2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$$

Si $a = 0$, en C tenemos,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -b \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, $Rango(A) = 3$ si $a = 0$ y $b \neq 2$.

Si $a \neq 0$, en C, se tiene,

$$C \xrightarrow{-af_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -b \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto, $Rango(A) = 3$ si $a \neq 0$ y $b \neq 2$.

En resumen, $Rango(A) = 2$, i.e. $dim(S) = 2$ si y sólo si $b = 2$, y para todo valor real de a.

5. Dados los siguientes planos, que son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y + z = 0\right\} \qquad W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y = 0\right\}$$

a) Determine la ecuación vectorial de la recta que corresponde a la intersección de V y W.

Respuesta:
Utilizando las ecuaciones normales de los dos planos, se forma un sistema homogéneo cuya solución es la intersección de los planos, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}f_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

La solución al sistema es: $x = -\frac{2}{3}z$, $y = \frac{1}{3}z$. Tome $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$, entonces la recta de intersección tiene las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}t \\ y = \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad (x, y, z) = t\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

.
Ahora, como el vector $(-2, 1, 3)$ es paralelo al vector $\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$, la ecuación de la recta que es la intersección de los planos es: $(x, y, z) = t(-2, 1, 3)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Demuestre que la intersección de V y W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Respuesta:
Nótese que la intersección de los planos V y W es una recta que pasa por el origen, con ecuación, $(x, y, z) = t(-2, 1, 3)$, $t \in \mathbb{R}$. Entonces, la recta contiene al vector $(0, 0, 0)$, tomando $t = 0$.

Ahora, sea $(x_1, y_1, z_1) = t(-2, 1, 3)$ y $(x_2, y_2, z_2) = s(-2, 1, 3)$ dos puntos de la recta, con $s, t \in \mathbb{R}$ fijos. Sea $c \in \mathbb{R}$, entonces,

$$c(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = ct(-2, 1, 3) + s(-2, 1, 3) = (ct + s)(-2, 1, 3)$$

Y como $ct + s \in \mathbb{R}$, entonces el vector $c(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$ está en la recta, y por tanto, como toda combinación lineal de vectores que son parte de la recta, es asímismo un vector que pertenece a la recta, entonces la recta de intersección de V y W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

6. Dado el subespacio vectorial W de $\mathbb{R}^3$, tal que $W = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$,

donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 9 & -6 \end{pmatrix}$.

a) Determine una base $\mathbb{B}$ de W.

Respuesta:
Observe que $W = EspacioNulo(A)$. Por lo tanto, para poder encontrar una base de W necesitamos determinar una propiedad explícita que determine al espacio nulo de la matriz A. Resolvemos entonces, el sistema homogéneo con matriz A;

$$A \begin{array}{c} \frac{1}{2}f_1 \\ \longrightarrow \\ \frac{1}{3}f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -f_1 + f_2 \\ \longrightarrow \\ -f_1 + f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La solución al sistema homogéneo es entonces: $x - 3y + 2z = 0$, que es un plano que pasa por el origen. Tomando, $y = s \in \mathbb{R}$ y $z = t \in \mathbb{R}$, entonces $x = 3s - 2t$, y se obtiene la siguiente caracterización de W;

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x, y, z) = (3s - 2t, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}\right\}$$

Entonces, si $(x, y, z) \in W$, se tiene;

$$(x, y, z) = (3s - 2t, s, t) = (3s, s, 0) + (-2t, 0, t) = s(3, 1, 0) + t(-2, 0, 1)$$

Por tanto, los vectores $v_1 = (3, 1, 0)$ y $v_2 = (-2, 0, 1)$, son una base $\mathbb{B} = \{v_1, v_2\}$ de W.

b) ¿Cuál es la dimensión de W? Justifique.

Respuesta:
Como la base $\mathbb{B}$ de W obtenida en la parte a) tiene 2 vectores, entonces $dim(W) = 2$.

c) Verifique que el vector $v = (8, 4, 2)$ pertenece a W.

Respuesta:
El vector $(8, 4, 2) \in W$ si y sólo si se puede escribir como una combinación lineal de la base $\mathbb{B}$ de W. Es decir, si y sólo si existen c_1 y c_2 tales que:

$$(8, 4, 2) = c_1v_1 + c_2v_2 = c_1(3, 1, 0) + c_2(-2, 0, 1)$$

Que es equivalente al sistema aumentado:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} -3f_2 + f_1 \\ \longrightarrow \\ 2f_3 + f_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces, $c_1 = 4$ y $c_2 = 2$, por tanto $(8, 4, 2) \in W$.

d) Escriba el vector de coordenadas de $v = (8, 4, 2)$ en la base $\mathbb{B}$ de W, encontrada en a).

Respuesta:

Como las coordenadas de un vector respecto a una base son los escalares tales que el vector se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base, por la parte c), entonces;

$$[v]_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7. Sea $S\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) \;\middle|\; c - 3a + 2b = 0, 2a - 3b + d = 0\right\}$.

a) Pruebe que S es un subespacio vectorial de $M(2,\mathbb{R})$.

Respuesta:

Primero note que $S \neq \emptyset$, pues $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$. Ahora, sean $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ dos elementos de S, y $z \in \mathbb{R}$, entonces sus coeficientes satisfacen las propiedades que acaracterizan a los elementos del conjunto S, es decir:

$$\begin{array}{cc} c_1 - 3a_1 + 2b_1 = 0 & c_2 - 3a_2 + 2b_2 = 0 \\ 2a_1 - 3b_1 + d_1 = 0 & 2a_2 - 3b_2 + d_2 = 0 \end{array}$$

Vamos a probar que,

$$z \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in S$$

Se tiene,

$$z \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} za_1 & zb_1 \\ zc_1 & zd_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} za_1 + a_2 & zb_1 + b_2 \\ zc_1 + c_2 & zd_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

Y verificamos que los coeficientes de esta matriz satisfacen las dos condiciones del conjunto S.

Primera condición:

$$(zc_1 + c_2) - 3(za_1 + a_2) + 2(zb_1 + b_2) = z(c_1 - 3a_1 + 2b_1) + (c_2 - 3a_2 + 2b_2) = z \cdot 0 + 0 = 0$$

Segunda condición:

$$2(za_1 + a_2) - 3(zb_1 + b_2) + (zd_1 + d_2) = z(2a_1 - 3b_1 + d_1) + (2a_2 - 3b_2 + d_2) = z \cdot 0 + 0 = 0$$

Entonces, $z \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in S$, por lo que S es un subespacio de $M(2,\mathbb{R})$.

b) Halle una base $\mathbb{B}$ de S.

Respuesta:

Como las condiciones que definen al conjunto S, son sobre los coeficientes de las matrices que conforman sus elementos, tenemos;

$$\begin{array}{c} c-3a+2b=0 \\ 2a-3b+d=0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} c=3a-2b \\ d=-2a+3b \end{array}$$

Entonces, todo elemento de S es de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 3a-2b & -2a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 3a & -2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -2b & 3b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces, se puede observar que todo elemento de S es combinación lineal de las matrices $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, y $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Note que v_1 y v_2 son linealmente independientes, de modo que $\mathbb{B} = \{v_1, v_2\}$ es base de S.

c) Verifique que $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in S$.

Respuesta:

Note que los coeficientes de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, satisfacen las dos condiciones de las matrices que pertenecen a S;
Primera condición: $0 - 3 \cdot (2) + 2 \cdot (3) = 0$
Segunda condición: $2 \cdot (2) - 3 \cdot (3) + (5) = 0$

Por tanto, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ está en S.

d) Calcule el vector de coordenadas de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ en la base $\mathbb{B}$ hallada en la parte b).

Respuesta:

De la parte b), se pudo ver que como $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in S$, entonces su relación con la base $\mathbb{B}$ está dada por:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces, las coordenas son: $\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8. Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{X} = (x_1, x_2, x_3)^t$ y U el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ formado por todos los vectores $\overrightarrow{b}$ tales que el sistema de ecuaciones lineales $A^t\overrightarrow{X} = \overrightarrow{b}$ tiene solución.

a) Encuentre una base para U.

Respuesta:
Note que;

$$U = \left\{ \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \overrightarrow{b} = A^t \overrightarrow{X} = A_1^t x_1 + A_2^t x_2 + A_3^t x_3 \right\} = \mathit{EspacioColumna}\left(A^t\right) = \mathit{EspacioFila}(A)$$

Lo anterior porque las columnas de A^t son las filas de A. Llevamos a A a su forma escalonada reducida para encontrar una base del espacio fila de A,

$$A \underset{-f_1+f_2}{\overset{f_1+f_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\frac{-1}{2}f_2}{\overset{-f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{f_2+f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Entonces, las filas no nulas de R son una base del espacio fila de A. De modo que si $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (0,1)$, entonces $\mathbb{B} = \{v_1, v_2\}$ es base del espacio fila de A, y por tanto es base de U.

b) Sin hacer cálculos adicionales, diga cuál es la dimensión del espacio vectorial generado por las columnas de la matriz A. Justifique su respuesta.

Respuesta:
Como $\mathit{Rango}(A) = \mathit{RangoFila}(A) = \mathit{RangoColumna}(A)$, y $\mathit{Rango}(A) = 2$, puesto que la matriz R tiene sólamente dos filas no nulas. Entonces, el $\mathit{EspacioColumna}(A)$ tiene dimensión 2.

c) Sin realizar ningún cálculo adicional, diga si las filas de A son linealmente independientes o son linealmente dependientes. Justifique su respuesta.

Respuesta:
Son linealmente dependientes, porque son 3 vectores en un espacio de dimensión 2.

d) Sin hacer cálculos adicionales, diga cuál es la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ formado por todos los vectores $\overrightarrow{x}$ que son solución del sistema de ecuaciones lineales $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, donde $\overrightarrow{0} \in \mathbb{R}^3$. Justifique su respuesta.

Respuesta:
Lo que se busca es determinar la dimensión del $\mathit{EspacioNulo}(A)$. En la parte a), se concuyó que la dimensión de $\mathit{EspacioFila}(A)$ es 2, y como el $\mathit{EspacioFila}(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, entonces, $\mathit{EspacioFila}(A) = \mathbb{R}^2$. Entonces, hay al menos dos maneras de contestar esta pregunta:

1) Como los sistemas $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ y $R\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ son equivalentes, donde R es la matriz de la parte a), y la única solución al sistema $R\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ es $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, entonces esa es la única solución a $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, por lo que el $\mathit{EspacioNulo}(A)$ sólamente consiste en el vector $\overrightarrow{0}$. Entonces, la dimensión del $\mathit{EspacioNulo}(A)$ es 0.

2) Como

$$2 = \mathit{dim}\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathit{Nulidad}(A) + \mathit{RangoFila}(A) = \mathit{Nulidad}(A) + 2$$

$$\Rightarrow \quad Nulidad(A) = dim(EspacioNulo(A)) = 0$$

En cualquiera de los dos casos, se concluye

$$dim(EspacioNulo(A)) = dim\left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}\right\} = 0$$

9. Indique, justificando, cuáles de los siguientes conjuntos S es subespacio del espacio vectorial dado V.

   a) $S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot X = 0\}$; siendo a un vector fijo de $V = \mathbb{R}^n$.

   Respuesta:
   Necesitamos verificar que $0 \in S$, con 0 el cero de $\mathbb{R}^n$ y si $c \in \mathbb{R}$, y $u, v \in S$, entonces $cu + v \in S$.

   Claramente, $0 = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ pertenece a S, porque el producto escalar de cualquier vector por cero es el cero.

   Sean, $u, v \in S$, entonces $a \cdot u = 0$, y $a \cdot v = 0$. Por tanto,

   $$a \cdot (cu + v) = a \cdot (cu) + a \cdot v = c(a \cdot u) + a \cdot v = c \cdot 0 + 0 = 0$$

   Entonces, $cu + v \in S$ y S es subespacio de V. Note que S es el subespacio de todos los vectores ortogonales al vector a.

   b) $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x - y = 3z + 2\right\}$; $V = \mathbb{R}^3$.

   Respuesta:
   Observe que la condición $2x - y = 3z + 2$ del conjunto S, es equivalente a la ecuación $2x - y - 3z = 2$ de un plano. Entonces S es un plano que no pasa por el origen, por lo tanto, no puede ser un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   c) $S = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid det(A) = 0\}$, $V = M(n, \mathbb{R})$.

   Respuesta:
   Observe que la matriz de ceros, $0 \in M(n, \mathbb{R})$ está en S, porque su determinante es igual a 0. Pero S no es un subespacio. Por ejemplo, en $M(2, \mathbb{R})$. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces note que $det(A) = 0$ y $det(B) = 0$, pero $det(A + B) = 1$.
   En general, en $M(n, \mathbb{R})$, considere la matriz A tal que es igual a la matriz identidad I_n de nxn, con la diferencia de que en la primera fila aparecen sólamente ceros. Y sea B la matriz donde en la primera fila, aparece un 1 en la primera entrada y ceros en el resto de la fila, y en todas las otras filas las entradas son de ceros. Entonces, $det(A) = 0$ y $det(B) = 0$, pero como $A + B = I_n$, entonces, $det(A + B) = det(I_n) = 1$. Entonces, esto da un ejemplo de que para todo $n \in \mathbb{N}$, S no es un subespacio de $M(n, \mathbb{R})$.

d) $S = \left\{ A \in M(n, \mathbb{R}) \;\middle|\; A = A^t \right\}$, $V = M(n, \mathbb{R})$.

Respuesta:
Sea $0 \in M(n, \mathbb{R})$ la matriz de ceros. Entonces, $0 = 0^t$, por tanto, $0 \in S$.

Sea $c \in \mathbb{R}$, sean $A, B \in S$. Entonces, $A = A^t$ y $B = B^t$. Por tanto,

$$(cA + B)^t = (cA)^t + B^t = cA^t + B^t = cA + B$$

por tanto, $cA + B \in S$. Entonces, S es subespacio de $M(n, \mathbb{R})$.

10. Sean, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $W = \left\{ Y \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; Y = AX, \text{para algún } X \in \mathbb{R}^5 \right\}$

a) Determine un conjunto $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$, de vectores de $\mathbb{R}^4$, tal que

$$W = Cl\left(\{w_1, w_2, ..., w_w\}\right).$$

Respuesta:
Observe que por la definición de W, y de la interpretación del producto matricial, que se tiene:

$$W = \left\{ Y \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; Y = A_1x_1 + ... + A_5x_5, \quad \text{con } (x_1, ..., x_5)^t \in \mathbb{R}^5, \;\; A_1, ..., A_5 \quad \text{las columnas de } A \right\}$$

Entonces, note que

$$\begin{aligned} W &= EspacioColumna(A) = \text{Espacio generado por las columnas de } A \\ &= gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

b) Halle una base para W, e identifique cuál es su dimensión.

Respuesta:
Determinamos la forma escalonada reducida R equivalente por filas a A, para encontrar una base al espacio columna de A. Entonces,

$$A \underset{-2f_1 + f_3}{\overset{-f_1 + f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{-f_2 + f_3}{\overset{-2f_4 + f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{2f_4 + f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{f_2 \Leftrightarrow f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} f_2 \Leftrightarrow f_4 \\ \longrightarrow \\ \frac{1}{3}f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -f_3 + f_2 \\ \longrightarrow \\ 2f_3 + f_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Como R es la forma escalonada reducida de A, por teorema, como las columnas que contienen el primer 1 de cada fila de R son las columnas 1, 2 y 4, entonces las respectivas columnas 1, 2 y 4 de A son una base del espacio columna de A, i.e. son una base de W, es decir,

$$\mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de W. Entonces, $dim(W) = 3$.

c) ¿Qué condiciones debe de cumplir un vector $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ para pertenecer al subespacio W?

Respuesta:
Por la definición de base, $(x, y, z, w) \in W$ si y sólo si se puede escribir como combinación lineal única de la base $\mathbb{B}$ de W. Es decir, si existen, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ tales que;

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Entonces se tiene el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 2 & 2 & 1 & z \\ 0 & -2 & -2 & w \end{array}\right) \begin{array}{c} -f_1 + f_2 \\ \longrightarrow \\ -2f_1 + f_3 \\ \frac{-1}{2}f_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & -2 & 1 & y - x \\ 0 & -2 & 1 & z - 2x \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-w}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} -f_2 + f_3 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & -2 & 1 & y - x \\ 0 & 0 & 0 & z - y - x \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-w}{2} \end{array}\right)$$

Entonces para que el sistema tenga solución, la ecuación que se describe en la fila 3 debe de ser concistente, es decir, que $z - y - x = 0$. Esta es entonces la condición necesaria para que un vector con componentes $(x, y, z, w)^t$ pertenezca a W.

Si asumimos que el sistema es consistente, entonces,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & -2 & 1 & y - x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-w}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} -2f_4 + f_1 \\ \longrightarrow \\ 2f_4 + f_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x + w \\ 0 & 0 & 3 & y - x - w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-w}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{3}f_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x + w \\ 0 & 0 & 1 & \frac{y-x-w}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-w}{2} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} 2f_2 + f_1 \\ \longrightarrow \\ -f_2 + f_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{x+2y+w}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{y-x-w}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2x-2y-w}{6} \end{array}\right) \Rightarrow c_1 = \frac{x + 2y + w}{3}, \ c_2 = \frac{2x - 2y - w}{6}, \ c_3 = \frac{y - x - w}{3}$$

Por lo tanto, si se cumple con la condición $z = x + y$, entonces el vector $(x, y, z, w)^t \in W$.

d) Complete la base que obtuvo para W a una base de $\mathbb{R}^4$.

Respuesta:
Según la parte c), entonces se puede caracterizar al subespacio W como el conjunto: $W = \left\{(x, y, z, w)^t \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; z = x + y\right\}$.

Entonces, por teorema, si se puede encontrar un vector $v \notin W$, entonces $\{v\} \cup \mathbb{B}$ forma un conjunto de 4 vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^4$ y por tanto es una base. Por consiguiente, sólo es necesario encontrar un vector que no esté en W.

Tome el vector $v = (1, 0, 0, 0)^t \notin W$, pues no cumple con las condiciones de W. Entonces,

$$\mathbb{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathbb{R}^4$.

e) Halle una base para el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por las filas de la matriz A.

Respuesta:
De la parte b), la matriz A tiene forma escalonada reducida R dada por:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base para el espacio generado por las filas de A, son las filas no nulas de R, de modo que se puede tomar la base:

$$\mathbb{B}_2 = \left\{ \left(1, 0, 1, 0, \frac{1}{3}\right), \left(0, 1, -1, 0, \frac{1}{3}\right), \left(0, 0, 0, 1, \frac{-4}{3}\right) \right\}$$

que es base del *EspacioFila*(A).

11. Sea $S = \left\{ A \in M(3, 2; \mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

a) Pruebe que S es un subespacio vectorial de $M(3, 2; \mathbb{R})$.

Respuesta:
Note que la matriz de ceros de $3x2$ está en S, pues el producto de cualquier matriz por la matriz de ceros, da como resultado la correspondiente matriz de ceros (cuyo tamaño depende

de las matrices involucradas en el producto), que en este caso es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ahora, necesitamos probar que si $c \in \mathbb{R}$, y $A, B \in S$, entonces $cA + B \in S$. Sean $A, B \in S$. Entonces, cumplen que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} (cA + B) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} (cA) + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} B \\ = c\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} B &= c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entonces, $cA + B \in S$, por lo tanto, S es un subespacio de $M(3, 2, \mathbb{R})$.

b) Halle una base $\mathbb{B}$ para S, e indique cuál es la dimensión de S.

Respuesta:
Para obtener una base de S, vamos a tratar de obtener una caracterización explícita para las entradas de las matrices que están en S.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in S$, entonces

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} a - c + 2e & b - d + 2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & a = c - 2e \quad b = d - 2f \end{aligned}$$

Entonces, $A = \begin{pmatrix} c - 2e & d - 2f \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$
y por tanto se puede describir al conjunto S como:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x - 2z & y - 2w \\ x & y \\ z & w \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

De la caracterización anterior de S, se observa que todos sus elementos se pueden describir como la siguiente combinación lineal:

$$\begin{pmatrix} x - 2z & y - 2w \\ x & y \\ z & w \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y como las matrices anteriores son linealmente independientes, y generan a todo vector de S (los vectores de S son matrices), entonces,

$$\mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es base de S y por tanto $dim(S) = 4$.

c) Muestre que

$$\mathbb{B} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

es base para $M(3, 2; \mathbb{R})$.

Respuesta:
Observe que la base canónica de $M(3, 2, \mathbb{R})$ tiene 6 elementos (cada matriz tiene un 1 en una de sus entradas y ceros en el resto de las entradas). Entonces, $dim(M(3, 2, \mathbb{R})) = 6$.

Por lo tanto, para completar la base $\mathbb{B}$ a una base de $M(3, 2, \mathbb{R})$ se necesitan dos vectores (matrices) que junto con los vectores de $\mathbb{B}$ conformen un conjunto de 6 vectores linealmente independientes, y que por teorema, como la dimensión es 6, entonces serían una base.

Entonces, lo que se busca es verificar que

$$\mathbb{D} = \mathbb{B} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

es un conjunto linealmente independiente, i.e. que si $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 \in \mathbb{R}$ son tales que,

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$+ c_5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + c_6 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$. La combinación lineal anterior es equivalente al sistema:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
c_1 & & & - & 2c_3 & & & + & c_5 & & & = & 0 \\
& & c_2 & & & - & 2c_4 & & & - & c_6 & = & 0 \\
c_1 & & & & & & & - & c_5 & & & = & 0 \\
& & c_2 & & & & & & & + & c_6 & = & 0 \\
& & & & c_3 & & & + & 2c_5 & & & = & 0 \\
& & & & & & c_4 & & & + & 2c_6 & = & 0
\end{array}$$

donde la única solución es $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$, la cual se obtiene al hacer sustitución hacia atrás: de las ecuaciones 3 al 6, se tiene $c_1 = c_5$, $c_2 = -c_6$, $c_3 = -2c_5$, $c_4 = -2c_6$, el resultado final se obtiene al sustituir en las ecuaciones 1 y 2.

Por lo tanto, las 6 matrices son linealmente independientes, y $\mathbb{D}$ es por consiguiente una base de $M(3,2,\mathbb{R})$.

12. Sea V un espacio vectorial de dimensión cinco y sea $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente en V.
Pruebe que si $v \notin Cl\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, entonces $\{w_1, w_2, w_3, w_4, v\}$ es base para V.

Respuesta:
Suponga $v \notin gen\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Entonces, v no puede expresarse como combinación lineal de w_1, w_2, w_3, w_4.

Sean $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$, y suponga

$$c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3 + c_4w_4 + c_5v = 0$$

Vamos a probar que $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$ y por lo tanto el conjunto $\{w_1, w_2, w_3, w_4, v\}$ es linealmente independiente.

Suponga que $c_5 \neq 0$. En este caso, claramente podemos despejar a v y escribirlo como la combinación lineal de w_1, w_2, w_3, w_4 dada por,

$$v = -\frac{c_1}{c_5}w_1 - \frac{c_2}{c_5}w_2 - \frac{c_3}{c_5}w_3 - \frac{c_4}{c_5}w_4$$

lo cual es una contradicción a nuestra suposición inicial de que $v \notin gen\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Entonces, $c_5 = 0$. Pero entonces tenemos,

$$c_1w_1 + c_2w_2 + c_3w_3 + c_4w_4 = 0$$

y como esos vectores son linealmente independientes, se debe cumplir que $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0 = c_5$. Entonces el conjunto $\mathbb{B} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, v\}$ es uno linealmente independiente y con 5 vectores en un espacio V de dimensión 5, y por tanto, por teorema se concluye que $\mathbb{B}$ es base de V.

8. Espacios con producto interno, ortogonalidad y proyecciones

1. Sea $W = \{(a-c, b+c, -a+b-c, c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$.

   a) Determine una base ortonormal para W.

   Respuesta:
   Note que para cada elemento de W,

$$\begin{aligned}(a-c, b+c, -a+b-c, c) &= (a,0,-a,0) + (0,b,b,0) + (-c,c,-c,c)\\ &= a(1,0,-1,0) + b(0,1,1,0) + c(-1,1,-1,1)\end{aligned}$$

   Entonces los vectores $v_1 = (1,0,-1,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$ y $v_3 = (-1,1,-1,1)$ determinan una base de W, ya que son linealmente independientes y generan a todo vector de W. Para encontrar una base ortogonal, aplicamos el algoritmo de Gram-Smith,

$$a_1 = v_1 = (1,0,-1,0) \quad \Rightarrow \quad ||a_1||^2 = 2 \quad ||a_1|| = \sqrt{2}$$

   Como, $v_2 \cdot a_1 = (0,1,1,0) \cdot (1,0,-1,0) = -1$, entonces,

$$a_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot a_1}{||a_1||^2} \cdot a_1 = (0,1,1,0) - \frac{-1}{2}(1,0,-1,0) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \quad ||a_2||^2 = \frac{3}{2} \quad ||a_2|| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

   Como, $v_3 \cdot a_1 = (-1,1,-1,1) \cdot (1,0,-1,0) = 0$ y $v_3 \cdot a_2 = (-1,1,-1,1) \cdot \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right) = 0$, entonces,

$$a_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot a_1}{||a_1||^2} \cdot a_1 - \frac{v_3 \cdot a_2}{||a_2||^2} \cdot a_2 = v_3 = (-1,1,-1,1)$$

$$\Rightarrow \quad ||a_3||^2 = 4 \quad ||a_3|| = 2$$

   Por tanto, una base ortogonal de W está conformada por los vectores, a_1, a_2, a_3. Para obtener una base ortonormal, normalizamos los vectores de la base ortogonal que acabamos de obtener.

$$b_1 = \frac{a_1}{||a_1||} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$b_2 = \frac{a_2}{||a_2||} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$$

$$b_3 = \frac{a_3}{||a_3||} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

   Entonces, $\mathbb{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ es una base ortonormal de W.

b) Determine $W^{\perp}$, el complemento ortogonal de W.

Respuesta:
Sea $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz cuyas filas son la base de W encontrada en la parte a). Entonces, $W = EspacioFila(A)$. Por teorema, el complemento ortogonal de $EspacioFila(A)$ es el $EspacioNulo(A)$, i.e. $W^{\perp} = EspacioNulo(A)$.

$$A \xrightarrow{f_1 + f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2 + f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{3} f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \underset{-f_3 + f_2}{\xrightarrow{f_3 + f_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

Entonces, se obtiene que $W^{\perp} = EspacioNulo(A) = \{(t, -t, t, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

2. Sea $W = Cl\{(1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,0,1,2)\}$.

a) Determine una base ortonormal para W.

Respuesta:
Como los vectores $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,1,-1)$ y $v_3 = (1,0,1,2)$ generan a W, entonces son una base si son linealmente independientes (l.i.).

Para determinar si son l.i., calculamos la solución al sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} v_1^t & v_2^t & v_3^t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces los vectores son linealmente independientes. Por tanto, $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de W. Para encontrar una base ortogonal, aplicamos el algoritmo de Gram-Smith;

$$a_1 = v_1 = (1,1,1,1) \quad \Rightarrow \quad ||a_1||^2 = 4 \quad ||a_1|| = 2$$

Como, $v_2 \cdot a_1 = (1,-1,1,-1) \cdot (1,1,1,1) = 0$, entonces,

$$a_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot a_2}{||a_1||^2} \cdot a_1 = v_2 = (1,-1,1,-1)$$

$$\Rightarrow \quad ||a_2||^2 = 4 \quad ||a_2|| = 2$$

Como, $v_3 \cdot a_1 = (1,0,1,2) \cdot (1,1,1,1) = 4$ y $v_3 \cdot a_2 = (1,0,1,2) \cdot (1,-1,1,-1) = 0$, entonces,

$$a_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot a_1}{||a_1||^2} \cdot a_1 - \frac{v_3 \cdot a_2}{||a_2||^2} \cdot a_2 = (1,0,1,2) - \frac{4}{4}(1,1,1,1) = (0,-1,0,1)$$

$$\Rightarrow \quad ||a_3||^2 = 2 \qquad ||a_3|| = \sqrt{2}$$

Por tanto, una base ortogonal de W está conformada por los vectores, a_1, a_2, a_3. Para obtener una base ortonormal, normalizamos los vectores de la base ortogonal que acabamos de obtener.

$$b_1 = \frac{a_1}{||a_1||} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$b_2 = \frac{a_2}{||a_2||} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$
$$b_3 = \frac{a_3}{||a_3||} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Entonces, $\mathbb{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ es una base ortonormal de W.

b) Determine la proyección de $v = (3,0,3,6)$ sobre W.

Respuesta:
Como $\mathbb{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ es una base ortonormal de W, entonces la proyección ortogonal de v sobre W está dada por,

$$Proy_W\, v = (v \cdot b_1) \cdot b_1 + (v \cdot b_2) \cdot b_2 + (v \cdot b_3) \cdot b_3$$

donde

$$v \cdot b_1 = (3,0,3,6) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 6$$
$$v \cdot b_2 = (3,0,3,6) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right) = 0$$
$$v \cdot b_3 = (3,0,3,6) \cdot \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

Entonces,

$$Proy_W\, v = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (3,0,3,6)$$

c) Determine el complemento ortogonal de W.

Respuesta:
Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz cuyas filas son la base de W. Entonces, $W = EspacioFila(A)$. Por teorema, el complemento ortogonal de $EspacioFila(A)$ es el $EspacioNulo(A)$, i.e. $W^{\perp} = EspacioNulo(A)$.

$$A \underset{-f_1+f_3}{\overset{-f_1+f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{-3f_3+f_2}{\overset{f_3+f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_2+f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{-1}{4}f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{5f_3+f_2}{\overset{-2f_3+f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, $W^{\perp} = EspacioNulo(A) = \{(t, 0, -t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

3. Sea $W = Cl\{(1, -1, 1, 1), (1, 1, 1, -1)\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

   a) Determine una base B ortonormal de $W^{\perp}$.
   Respuesta:
   El complemento ortogonal del espacio fila de una matriz A es el espacio nulo de A.

   Entonces, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ el complemento ortogonal de W es el espacio nulo de A.
   Por tanto buscamos una base del espacio nulo.

$$A \overset{-f_1+f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Entonces, $W^{\perp} = EspacioNulo(A) = \{(-s, t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$
   Para encontrar una base separamos los parámetros:

$$(-s, t, s, t) = (-s, 0, s, 0) + (0, t, 0, t) = s(-1, 0, 1, 0) + t(0, 1, 0, 1)$$

   Entonces, $v_1 = (-1, 0, 1, 0)$ y $v_2 = (0, 1, 0, 1)$ son una base de $W^{\perp}$. Note que los vectores v_1 y v_2 son ortogonales, pues $v_1 \cdot v_2 = (0, 1, 0, 1) \cdot (-1, 0, 1, 0) = 0$. Para encontrar una base ortonormal, sólo necesitamos normalizarlos.

$$b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1, 0, 1, 0) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$
$$b_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0, 1, 0, 1) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

   Entonces,

$$B = \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

   es una base ortonormal de $W^{\perp}$.

b) Complete B a una base D ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

Respuesta:
Si unimos las bases de W y $W^{\perp}$ podemos obtener una base de $\mathbb{R}^4$. Primero necesitamos una base ortonormal de W.

Como $\{w_1, w_2\} = \{(1,-1,1,1),(1,1,1,-1)\}$ es base de W, y además, $w_1 \cdot w_2 = (1,-1,1,1) \cdot (1,1,1,-1) = 0$, entonces, son una base ortogonal de W. Por tanto para obtener una base ortonormal sólamente es necesario normalizar los vectores.

$$c_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{2} \cdot (1,-1,1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$c_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{2} \cdot (1,1,1,-1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

Entonces,

$$C = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)\right\}$$

es base ortonormal de W. Por lo tanto, una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ es:

$$D = B \cup C = \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)\right\}$$

Note que esa base, contiene a la base B de $W^{\perp}$, por lo tanto, completa la base.

c) Compruebe que el vector $\overrightarrow{u} = (2,-1,0,0)$ no pertenece a $W^{\perp}$ y determine la proyección ortogonal de $\overrightarrow{u}$ sobre $W^{\perp}$.

Respuesta:
De la parte a), $W^{\perp} = \{(-s,t,s,t) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$, y claramente, $\overrightarrow{u}$ no tiene esa forma, entonces $\overrightarrow{u} \notin W^{\perp}$. Como,

$$B = \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

es base ortonormal de $W^{\perp}$, entonces la proyección ortogonal de $\overrightarrow{u}$ sobre $W^{\perp}$ es:

$$\begin{aligned}
Proy_{W^{\perp}} \overrightarrow{u} &= \left((2,-1,0,0) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\
&+ \left((2,-1,0,0) \cdot \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \cdot \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&\left(1, \frac{-1}{2}, -1, \frac{-1}{2}\right)
\end{aligned}$$

d) Determine $\left[Proy_{W^\perp}\overrightarrow{u}\right]_B$.

Respuesta:
Buscamos c_1 y c_2 tales que,

$$\left(1, \frac{-1}{2}, -1, \frac{-1}{2}\right) = c_1 \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + c_2 \cdot \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

y como B es una base ortonormal, y por la parte c), se conluye que,

$$\left[Proy_{W^\perp}\overrightarrow{u}\right]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

4. Considere el siguiente subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$W = Cl\{(1,1,0,1), (-1,3,1,2), (-1,0,1,1)\}$$

a) Construya una base ortonormal de W.

Respuesta:
Aplicamos el algoritmo de Gram-Smith, para obtener una base ortogonal y luego los normalizamos para que sea ortonormal.

Sean $v_1 = (1,1,0,1)$, $v_2 = (-1,3,1,2)$, $v_3 = (-1,0,1,1)$.

$$a_1 = v_1 = (1,1,0,1) \quad \Rightarrow \quad ||a_1||^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad ||a_1|| = \sqrt{3}$$

Como, $v_2 \cdot a_1 = (-1,3,1,2) \cdot (1,1,0,1) = 4$, entonces,

$$a_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot a_1}{||a_1||^2} \cdot a_1 = (-1,3,1,2) - \frac{4}{3}(1,1,0,1) = \left(\frac{-7}{3}, \frac{5}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad ||a_2||^2 = \frac{29}{3} \quad \Rightarrow \quad ||a_2|| = \frac{\sqrt{87}}{3}$$

Como, $v_3 \cdot a_1 = (-1,0,1,1) \cdot (1,1,0,1) = 0$ y $v_3 \cdot a_2 = (-1,0,1,1) \cdot \left(\frac{-7}{3}, \frac{5}{3}, 1, \frac{2}{3}\right) = 4$, entonces,

$$a_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot a_1}{||a_1||^2} \cdot a_1 - \frac{v_3 \cdot a_2}{||a_2||^2} \cdot a_2 = v_3 = (-1,0,1,1) - \frac{0}{3} \cdot (1,1,0,1) - \frac{4}{\frac{29}{3}} \cdot \left(\frac{-7}{3}, \frac{5}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$$

$$= (-1,0,1,1) - \frac{4}{29} \cdot (-7,5,3,2) = \left(\frac{-1}{29}, \frac{-20}{29}, \frac{17}{29}, \frac{21}{29}\right)$$

$$\Rightarrow \quad ||a_3||^2 = \frac{39}{29} \quad \Rightarrow \quad ||a_3|| = \sqrt{\frac{39}{29}}$$

Por tanto, una base ortogonal de W es $\{a_1, a_2, a_3\}$. Para obtener una base ortonormal, normalizamos los vectores de la base ortogonal que acabamos de obtener.

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1,1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$b_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{87}}{3}} \cdot \left(\frac{-7}{3}, \frac{5}{3}, 1, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{-7}{\sqrt{87}}, \frac{5}{\sqrt{87}}, \frac{3}{\sqrt{87}}, \frac{2}{\sqrt{87}}\right)$$

$$b_3 = \frac{a_3}{\|a_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{39}{29}}} \cdot \left(\frac{-1}{29}, \frac{-20}{29}, \frac{17}{29}, \frac{21}{29}\right) = \sqrt{\frac{29}{39}} \cdot \left(\frac{-1}{29}, \frac{-20}{29}, \frac{17}{29}, \frac{21}{29}\right)$$

Entonces, $\mathbb{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ es una base ortonormal de W.

b) Construya una base para $W^{\perp}$.

Respuesta:
Sea A la matriz que tiene a los vectores que generan a W como filas, es decir,

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, el espacio generado por las filas de A es igual a W, pues están generados por los mismos vectores. De modo que $W = \mathit{EspacioFila}(A)$. Por teorema, el complemento ortogonal del espacio fila de A es el espacio nulo de A. Entonces, $W^{\perp} = \mathit{EspacioNulo}(A)$. De modo que lo que necesitamos es una base del espacio nulo de A.

$$A \underset{f_1+f_3}{\overset{f_1+f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{-f_3+f_1}{\overset{-4f_3+f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\frac{-1}{3}f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{-f_2+f_3}{\overset{f_2+f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \overset{f_2 \Leftrightarrow f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{-2}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{-1}{3}x_4 \\ x_3 = \frac{-5}{3}x_4 \end{array}$$

Por lo tanto, el complemento ortogonal de W es:

$$W^{\perp} = \mathit{EspacioNulo}(A) = \left\{\left(\frac{2}{3}t, \frac{1}{3}t, \frac{5}{3}t, -t\right)\right\}$$

Entonces, una base de $W^{\perp}$ se obtiene de:

$$\left(\frac{2}{3}t, \frac{1}{3}t, \frac{5}{3}t, -t\right) = \frac{t}{3}(2,1,5,-3)$$

De modo que $\{(2,1,5,-3)\}$ es una base de $W^{\perp}$. Como $\|(2,1,5,-3)\| = \sqrt{39}$, normalizamos al vector de la base para obtener una base ortonormal. Entonces,

$$\mathbb{B}_{W^{\perp}} = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{39}}, \frac{1}{\sqrt{39}}, \frac{5}{\sqrt{39}}, \frac{-3}{\sqrt{39}}\right)\right\}$$

es una base ortonormal de $W^{\perp}$.

c) Represente al vector $\overrightarrow{a} = (4,3,3,-1)$ como la suma de un vector $\in W$ y de un vector $\overrightarrow{c} \in W^{\perp}$.

Respuesta:
Por el teorema de proyección, todo vector $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^4$, se puede escribir como,

$$\overrightarrow{a} = \underbrace{Proy_W \overrightarrow{a}}_{\text{está en } W} + \underbrace{Proy_{W^{\perp}} \overrightarrow{a}}_{\text{está en } W^{\perp}}$$

Tomando la base ortonormal de W calculada en la parte, a), se tiene,

$$Proy_W \overrightarrow{a} = \left(\overrightarrow{a} \cdot b_1\right) \cdot b_1 + \left(\overrightarrow{a} \cdot b_2\right) \cdot b_2 + \left(\overrightarrow{a} \cdot b_3\right) \cdot b_3$$

y como, $\overrightarrow{a} \cdot b_1 = 6$, $\overrightarrow{a} \cdot b_2 = \frac{-6}{\sqrt{87}}$ y $\overrightarrow{a} \cdot b_3 = -\frac{34}{29}\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{39}}$, entonces,

$$\begin{aligned} Proy_W \overrightarrow{a} &= 6 \cdot (1,1,0,1) - \frac{6}{\sqrt{87}} \cdot \left(\frac{-7}{\sqrt{87}}, \frac{5}{\sqrt{87}}, \frac{3}{\sqrt{87}}, \frac{2}{\sqrt{87}}\right) - \frac{34}{29}\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{39}}\sqrt{\frac{29}{39}} \cdot \left(\frac{-1}{29}, \frac{-20}{29}, \frac{17}{29}, \frac{21}{29}\right) \\ &= \left(\frac{254}{39}, \frac{244}{39}, \frac{-28}{39}, \frac{68}{13}\right) \end{aligned}$$

y de lo anterior se obtiene que,

$$Proy_{W^{\perp}} \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} - Proy_W \overrightarrow{a} = \left(-\frac{98}{39}, -\frac{127}{39}, \frac{145}{39}, -\frac{81}{13}\right)$$

5. Sea $W = Cl\{(1,0,0,1),(0,1,1,0)\}$.

a) Determine una base ortonormal para W.

Respuesta:
Sean $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,1,1,0)$. Entonces, $v_1 \cdot v_2 = 0$, por lo tanto, v_1 y v_2 son ortogonales, y son *li*, como generan a W, entonces $\{v_1, v_2\}$ es una base ortogonal de W. Para encontrar una base ortonormal, entonces sólamente necesitamos normalizarlos.

Como, $\|v_1\| = \sqrt{2}$ y $\|v_2\| = \sqrt{2}$, se tiene,

$$a_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{y} \qquad a_2 = \frac{1}{v_2} \cdot v_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Entonces, $\mathbb{B}_W = \{a_1, a_2\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}$ es base ortonormal de W.

b) Determine una base ortonormal para $W^{\perp}$ (el complemento ortogonal de W).

Respuesta:
Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces, $EspacioFila(A) = gen\{v_1, v_2\} = W$. Por teorema, el complemento ortogonal del espacio fila de A es el espacio nulo de A. Es decir, $W^{\perp} = EspacioNulo(A)$.

Calculamos la forma escalonada reducida de A para determinar su espacio nulo. Pero note que A ya está en la forma escalonada reducida, por lo que su espacio nulo entonces tiene la forma,

$$W^{\perp} = EspacioNulo(A) = \{(-s, -t, t, s) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

Separando los parámetros, $(-s, -t, t, s) = s(-1, 0, 0, 1) + t(0, -1, 1, 0)$. De modo que entonces, los vectores $v_3 = (-1, 0, 0, 1)$ y $v_4 = (0, -1, 1, 0)$ son base de $W^{\perp}$. Más aún, como $v_3 \cdot v_4 = 0$, entonces son una base ortogonal. Para encontrar una base ortonormal, entonces sólo nos resta normalizarlos.

Como $\|v_3\| = \sqrt{2}$ y $\|v_4\| = \sqrt{2}$, entonces,

$$a_3 = \frac{1}{\|v_3\|} \cdot v_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{y} \qquad a_4 = \frac{1}{v_4} \cdot v_2 = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Entonces, $\mathbb{B}_{W_{\perp}} = \{a_3, a_4\} = \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}$ es base ortonormal de $W_{\perp}$.

6. Sea $W = Cl\,\{(1, 1, 1)\}$ y $U = \{(0, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

   a) Pruebe que U es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   Respuesta:
   Esto se puede probar al menos de dos maneras. La primera, note que U es un plano que pasa por el origen. Para ver por qué, note que si $(x, y, z) \in U$, entonces $\exists s, t \in \mathbb{R}$ tal que

   $$(x, y, z) = (0, s, t) = s(0, 1, 0) + t(0, 0, 1)$$

   que es la ecuación vectorial del plano que pasa por el origen con los vectores directores $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, l)$.

   Como todo plano que pasa por el origen en $\mathbb{R}^3$ es un subespacio, entonces U es subespacio.

   La segunda manera de probar el resultado es usando la definición de subespacio. Sean $X = (0, a_1, a_2)$ y $Y = (0, b_2, b_3)$ dos vectores de U. En ese caso, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Sea $c \in \mathbb{R}$. Hay que probar que $cX + Y \in U$. Como,

   $$cX + Y = c \cdot (0, a_1, a_2) + (0, b_1, b_2) = (0, ca_1, ca_2) + (0, b_1, b_2) = (0, ca_1 + b_1, ca_2 + b_2)$$

   y como $ca_1 + b_1, ca_2 + b_2 \in \mathbb{R}$, entonces $cX + Y \in U$ (pues tiene la misma forma que los vectores de U). Como además, es claro que $(0, 0, 0) \in U$, entonces U es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   b) Halle una base para $W^{\perp}$.

   Respuesta:

Como $W = gen\{(1,1,1)\}$, entonces W se puede interpretar geométricamente como una recta que pasa por el origen con vector director $(1,1,1)$. Geométricamente, $W^{\perp}$ son todos los planos perpendiculares a la recta, todos unidos uno junto al otro. Los dos vectores directores de cualesquiera de esos planos (pues todos son paralelos entre sí), son la base de $W^{\perp}$ que buscamos.

Sea $A = (1,1,1)$, el espacio fila de A es W, y el espacio nulo es $W^{\perp}$, entonces

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y + z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -y - z$$

Entonces, $W^{\perp} = \{(-s-t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. Por tanto, separando los parámetros:

$$(-s-t, s, t) = s\,(-1,1,0) + t\,(-1,0,1)$$

Por tanto, $v_1 = (-1,1,0)$ y $v_2 = (-1,0,1)$ son base de $W^{\perp}$.

c) Muestre que todo vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ puede escribirse como la suma de un elemento de U más un elemento de W.

Respuesta:
Una base para W es $a_1 = (1,1,1)$ y una base para U es $a_2 = (0,1,0)$ y $a_3 = (0,0,1)$.

Mostremos que $\{a_1, a_2, a_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Si esto es cierto, entonces todo vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se escribiría como combinación lineal de a_1, a_2, a_3, es decir como;

$$(x,y,z) = \underbrace{c_1 a_1}_{\text{vector de } W} + \underbrace{c_2 a_2 + c_3 a_3}_{\text{vector de } U}$$

y si existen esos c_1, c_2, c_3, entonces se probaría lo deseado.

Los vectores son *li*, ya que si B es la matriz que los tiene como columnas, B es equivalente por filas a I_3 la identidad de orden 3.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \longrightarrow I_3$$

entonces, como $\{a_1, a_2, a_3\}$ son *li* y son 3 vectores, son una base de $\mathbb{R}^3$ y concluimos que todo vector de $\mathbb{R}^3$ se escribe como la suma de un vector de W y un vector de U.

d) Pruebe que $\mathbb{B} = \{(1,1,1), (1,0,-1), (0,-1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y determine $\left[(x,y,z)\right]_{\mathbb{B}}$.

Respuesta:
Como son 3 vectores $dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$, vasta con verificar que son *li* para que sean base. Ahora, podemos verificar que son *li* si calculamos la fórmula general de coordenadas $\left[(x,y,z)\right]_{\mathbb{B}}$, y luego verificamos que $\left[(0,0,0)\right]_{\mathbb{B}} = (0,0,0)^t$.

Entonces, sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & -1 & y \\ 1 & -1 & 1 & z \end{array}\right) \underset{-f_1+f_3}{\overset{-f_1+f_2}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & -1 & y-x \\ 0 & -2 & 1 & z-x \end{array}\right) \underset{-f_3}{\overset{-f_2}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & x-y \\ 0 & 2 & -1 & x-z \end{array}\right)$$

$$\underset{-2f_2+f_3}{\overset{-f_2+f_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & y \\ 0 & 1 & 1 & x-y \\ 0 & 0 & -3 & -x+2y-z \end{array}\right) \overset{\frac{-1}{3}f_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & y \\ 0 & 1 & 1 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x-2y-z}{3} \end{array}\right)$$

$$\underset{-f_3+f2}{\overset{f_3+f_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{x+y+z}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2x-y-z}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x-2y+z}{3} \end{array}\right)$$

Entonces,

$$\left[(x, y, z)\right]_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} \frac{x+y+z}{3} \\ \frac{2x-y-z}{3} \\ \frac{x-2y+z}{3} \end{pmatrix}$$

y como $\left[(0, 0, 0)\right]_{\mathbb{B}} = (0, 0, 0)^t$ entonces $\mathbb{B}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

7. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, U el espacio generado por las filas de A y $V = \left\{X \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; AX = 0\right\}$.

a) Determine una base para V.

Respuesta:
Note que $V = \left\{X \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; AX = 0\right\}$ es el espacio nulo de A. Entonces, calculamos una base de V a partir de la solución al sistema $AX = 0$.

$$A \underset{-f_1+f_3}{\overset{-f_1+f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{f_3+f_1}{\overset{-f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{2f_3+f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{-f_3}{\overset{\frac{1}{3}f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{f_2+f_3}{\overset{-f_2+f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{f_2 \Leftrightarrow f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Entonces, $W = \{(0, 0, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ (puesto que en la solución del sistema la variable x_4 puede tomar un valor arbitrario). Podemos encontrar una base separando el parámetro t: $(0, 0, 0, t) = t(0, 0, 0, 1)$. Entonces, $v_1 = (0, 0, 0, 1)$ es una base de V.

b) Determine una base ortonormal para U.

Respuesta:

Por definición, $U = EspacioFila(A)$. De la parte *a*), la matriz R es la forma escalonada reducida de A, entonces las filas no nulas de R son base del espacio fila de A, es decir, los vectores $w_1 = (1,0,0,0)$, $w_2 = (0,1,0,0)$ y $w_3 = (0,0,1,0)$ son base de U. Note que son ortogonales y además son parte de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

c) Muestre que $V = U^{\perp}$.

Respuesta:
Como U es el espacio fila de A, por teorema el complemento ortogonal del espacio fila es el espacio nulo de A, es decir, $V = U^{\perp}$.

d) Si $x = (-4,3,-1,5)$ halle $a = Proy_{U},\ x$
.

Respuesta:
Si $x = (-4,3,-1,5)$ entonces como la base $\{w_1, w_2, w_3\}$ de U es una base ortonormal, entonces podemos usar la fórmula de cálculo de la proyección ortogonal

$$\begin{aligned} a = Proy_U\, x &= (x \cdot w_1) \cdot w_1 + (x \cdot w_2) \cdot w_2 + (x \cdot w_2) \cdot w_2 \\ &= -4 \cdot (1,0,0,0) + 3 \cdot (0,1,0,0) + -1 \cdot (0,0,1,0) = (-4,3,-1,0) \end{aligned}$$

Este resultado es esperado por cuanto la base de U es parte de la canónica.

8. Sea $\mathbb{B} = \{u_1, u_2\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Muestre que $\mathbb{S} = \{u_1 + u_2, u_1 - u_2\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$.

Respuesta:
Como $\mathbb{B} = \{u_1, u_2\}$ es base ortonormal, se tiene que $u_1 \cdot u_2$ y $||u_1|| = ||u_2|| = 1$. Ahora, como $\mathbb{S}$ tiene 2 vectores, asumiendo que $u_1 + u_2 \neq 0$ y $u_1 - u_2 \neq 0$, entonces $\mathbb{S}$ es un conjunto ortogonal puesto que

$$(u_1 + u_2) \cdot (u_1 - u_2) = u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_1 - u_1 \cdot u_2 - u_2 \cdot u_2 = ||u_1||^2 + 0 - 0 - ||u_2||^2 = 1 - 1 = 0$$

Entonces, como los vectores de $\mathbb{S}$ son ortogonales, son también *li* y por ser dos vectores y como $dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2$, entonces $\mathbb{S}$ es base ortogonal de $\mathbb{R}^2$.

9. Considere el siguiente subespacio $W = \{(x, x - y + z, y + 2z, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^4$.

a) Halle una base ortonormal para W.

Respuesta:
Para encontrar una base de W separamos los parámetros:

$$(x, x - y + z, y + 2z, z) = x\,(1,1,0,0) + y\,(0,-1,1,0) + z\,(0,1,2,1)$$

Entonces $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,-1,1,0)$ y $v_3 = (0,1,2,1)$ son una base para W. Aplicamos el algoritmo de Gram-Smith, para obtener una base ortogonal y luego los normalizamos para que sea ortonormal.

$$a_1 = v_1 = (1,1,0,0) \quad \Rightarrow \quad \|a_1\|^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \|a_1\| = \sqrt{2}$$

Como, $v_2 \cdot a_1 = (0,-1,1,0)\cdot(1,1,0,0) = -1$, entonces,

$$a_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot a_1}{\|a_1\|^2} \cdot a_1 = (0,-1,1,0) - \frac{-1}{2}(1,1,0,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1, 0\right)$$

$$\Rightarrow \quad \|a_2\|^2 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \|a_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Como, $v_3 \cdot a_1 = (0,1,2,1)\cdot(1,1,0,0) = 1$ y $v_3 \cdot a_2 = (0,1,2,1)\cdot\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1, 0\right) = \frac{3}{2}$, entonces,

$$a_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot a_1}{\|a_1\|^2} \cdot a_1 - \frac{v_3 \cdot a_2}{\|a_2\|^2} \cdot a_2 = v_3 = (0,1,2,1) - \frac{1}{2}\cdot(1,1,0,0) - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1, 0\right) = (-1,1,1,1)$$

$$\Rightarrow \quad \|a_3\|^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \|a_3\| = 2$$

Por tanto, una base ortogonal de W es $\{a_1, a_2, a_3\}$. Para obtener una base ortonormal, normalizamos los vectores de la base ortogonal que acabamos de obtener.

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$$
$$b_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$$
$$b_3 = \frac{a_3}{\|a_3\|} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Entonces, $\mathbb{B}_W = \{b_1, b_2, b_3\}$ es una base ortonormal de W.

b) Halle una base ortonormal para $W^\perp$.

Respuesta:
Sea A la matriz que tiene a los vectores que generan a W como filas, es decir,

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, el espacio generado por las filas de A es igual a W, pues están generados por los mismos vectores. De modo que $W = \mathit{EspacioFila}(A)$. Por teorema, el complemento ortogonal del espacio fila de A es el espacio nulo de A. Entonces, $W^\perp = \mathit{EspacioNulo}(A)$. De modo que lo que necesitamos es una base del espacio nulo de A.

$$A \underset{f_2+f_3}{\overset{f_2+f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{3}f_3}{\overset{-f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \underset{f_3+f_2}{\overset{-f_3+f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $W^{\perp}$ es: $W^{\perp} = \{(t, -t, -t, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Entonces, una base de $W^{\perp}$ se obtiene de sacar el parámetro: $(t, -t, -t, 3t) = t\,(1, -1, -1, 3)$. De modo que $v_4 = (1, -1, -1, 3)$ es una base de $W^{\perp}$. Normalizamos al vector de la base para obtener una base ortonormal. Como $\|v_4\| = 2\sqrt{3}$ entonces,

$$b_4 = \left\{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}\right)\right\}$$

Entonces $\mathbb{B}_{W^{\perp}} = \{b_4\}$ es una base ortonormal de $W^{\perp}$.

9. Transformaciones lineales

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T(1,1,1) = (2,0,4), \quad T(0,-1,1) = (-1,-1,-1), \quad T(0,0,-1) = (0,1,-1)$$

a) Calcule $T(x,y,z)$.

Respuesta:
Primero, note que los vectores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,-1,1)$ y $v_3 = (0,0,-1)$ son una base de $\mathbb{R}^3$. Para comprobarlo, sólo necesitamos comprobar que son linealmente independientes (*li*), ya que la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, y como son 3 vectores, por teorema, entonces generan y por tanto serían una base.

Antes de verificar que son *li*, note que si $\mathbb{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, como toda transformación lineal queda determinada por su efecto sobre una base, entonces podemos expresar a T en términos de las imagenes de los vectores de la base $\mathbb{B}$. En ese sentido, si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y $\left[(x,y,z)\right]_{\mathbb{B}} = (c_1, c_2, c_3)^t$ son sus coordenadas con respecto a $\mathbb{B}$, entonces,

$$(x,y,z) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

y como T es transformación lineal,

$$T(x,y,z) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + c_3 T(v_3)$$

y como ya conocemos $T(v_1)$, $T(v_2)$ y $T(v_3)$, sólo necesitamos encontrar los valores c_1, c_2 y c_3. Calculamos las coordenas de un vector cualquiera (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ respecto a la base $\mathbb{B}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & -1 & 0 & y \\ 1 & 1 & -1 & z \end{array}\right) \begin{array}{c} -f_1 + f_2 \\ \longrightarrow \\ -f_1 + f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 & y - x \\ 0 & 1 & -1 & z - x \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} f_2 + f_3 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 & y - x \\ 0 & 0 & -1 & z + y - 2x \end{array}\right) \begin{array}{c} -f_2 \\ \longrightarrow \\ -f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & x - y \\ 0 & 0 & 1 & 2x - y - z \end{array}\right)$$

Entonces, la fórmula general de las coordenadas de cualquier vector (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ es:

$$\left[(x,y,z)\right]_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} x \\ x - y \\ 2x - y - z \end{pmatrix}$$

Con esto, podemos verificar fácilmente que los vectores v_1, v_2 y v_3 son *li*, puesto que si tomamos $(x,y,z) = (0,0,0)$, i.e., si $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$, entonces claramente $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Finalmente, por los argumentos antes dados, entonces la transformación se escribe como;

$$T(x,y,z) = x \cdot (2,0,4) + (x - y) \cdot (-1,-1,-1) + (2x - y - z) \cdot (0,1,-1)$$
$$= (2x - x + y, -x + y + 2x - y - z, 4x - x + y - 2x + y + z) = (x + y, x - z, x + 2y + z)$$

Entonces una expresión general para T es: $T(x,y,z) = (x+y, x-z, x+2y+z)$.

b) Determine una base para el núcleo de T.

Respuesta:
Observe que la matriz de la transformación T respecto a la base canónica $C = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ está dada por,

$$\left[T\right]_C = \left[T(e_1) \quad T(e_2) \quad T(e_3)\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Y como, las coordenadas de un vector de $\mathbb{R}^3$, respecto a la base canónica C son el mismo vector (en general esto es cierto en $\mathbb{R}^n$), i.e. si $(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3$ entonces,

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se tiene entonces que, la siguiente es una representación matricial para T,

$$\left[T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_C = \left[T\right]_C \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_C \quad \Leftrightarrow \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Entonces, como $ker(T) = EspacioNulo\left(\left[T\right]_C\right)$, se tiene que

$$\left[T\right]_C \underset{-f_1+f_3}{\overset{-f_1+f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_2+f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{f_2+f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

Por lo tanto, $ker(T) = \{(t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Note que $(t,-t,t) = t(1,-1,1)$, entonces una base de $ker(T)$ es $\mathbb{B}_1 = \{(1,-1,1)\}$.

c) Determine una base para $Img(T)$.

Respuesta:
Como $Img(T) = EspacioColumna\left(\left[T\right]_C\right)$, para encontrar una base para $Img(T)$, lo que necesitamos es una base del espacio generado por las columnas de $\left[T\right]_C$. Por los cálculos de la parte b),

$$\left[T\right]_C \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, como las columnas 1 y 2 de la forma escalonada reducida tienen el primer 1 de cada fila, las columnas respectivas de la matriz $\left[T\right]_C$ son una base de su espacio columna.

Entonces, $\mathbb{B}_2 = \{(1,1,1),(1,0,2)\}$ es base de $Img(T)$.

2. Sea $B = \{u, v, w\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$\left[T\right]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Verifique si la transformación T es o no invertible.

Respuesta:
Por teorema, T es invertible si y sólo si $\left[T\right]_B$ es una matriz invertible. Pero dicha matriz es invertible si y sólo si es equivalente por filas a la identidad. Entonces,

$$\left[T\right]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_1 + f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{-f_2 + f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\left[T\right]_B$ no es invertible y entonces T tampoco lo es.

b) Si p es un vector de $\mathbb{R}^3$ tal que $p = 2u + w$, determine $\left[T(p)\right]_B$.

Respuesta:
Tenemos la fórmula de coordenadas;

$$\left[T(p)\right]_B = \left[T\right]_B \cdot \left[p\right]_B$$

Como p se puede escribir como la siguiente combinación lineal de los vectores de la base B: $p = 2u + w$, entonces, $\left[p\right]_B = (2,0,1)^t$ son las coordenadas de p. Y aplicando la fórmula de coordenadas,

$$\left[T(p)\right]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Si $B = \{(1,1,1),(1,2,0),(2,0,0)\}$ y C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, determine $\left[T\right]_B^C$.

Respuesta:
Como no tenemos la forma explícita de la transformación, entonces podemos usar la fórmula de la matriz de una composición de transformaciones para realizar el cálculo.

Note que si $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación identidad, entonces $T = I \circ T$, por lo tanto, por teorema, tenemos la fórmula de coordenadas para la composición de transformaciones lineales:

$$\left[T\right]_B^C = \left[I\right]_B^C \cdot \left[T\right]_B$$

donde, $\left[I\right]_B^C$ es la matriz de cambio de base de B a C.

Calculamos entonces la matriz de cambio de base B a C. Por la definición, tenemos que,

$$\left[I\right]_B^C = \left[\begin{array}{ccc} I(u) & I(v) & I(w) \end{array}\right]_C = \left[\begin{array}{ccc} u & v & w \end{array}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, aplicando la fórmula de la matriz de una composición de transformaciones lineales, se tiene,

$$\left[T\right]_B^C = \left[I\right]_B^C \cdot \left[T\right]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal, tal que $\left[T\right]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ donde $B = \{(1,3), (-1,4)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

   a) Calcule $\left[T(x,y)\right]_B$.

   Respuesta:
   Por la fórmula de coordenadas, $\left[T(x,y)\right]_B = \left[T\right]_B \cdot \left[(x,y)\right]_B$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 3 & 4 & y \end{array}\right) \xrightarrow{-3f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 7 & y-3x \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{7}f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & \frac{y-3x}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-3f_2 + f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{4x+y}{7} \\ 0 & 1 & \frac{y-3x}{7} \end{array}\right) \Rightarrow \left[(x,y)\right]_B = \left(\frac{4x+y}{7}, \frac{y-3x}{7}\right)^t$$

   Entonces,

$$\left[T(x,y)\right]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4x+y}{7} \\ \frac{y-3x}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{3y}{7} - \frac{9x}{7} \\ \frac{-8x}{7} - \frac{2y}{7} + \frac{5y}{7} - \frac{15x}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4y}{7} - \frac{5x}{7} \\ \frac{-23x}{7} + \frac{3y}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4y-5x}{7} \\ \frac{3y-23x}{7} \end{pmatrix}$$

   b) Calcule $T(x,y)$.

   Respuesta:
   Por la parte a), tenemos las coordenadas de $T(x,y)$ en la base B, por lo tanto, podemos escribir a T como combinación lineal de la base B, es decir:

$$T(x,y) = \left(\frac{4y-5x}{7}\right) \cdot (1,3) + \left(\frac{3y-23x}{7}\right) \cdot (-1,4) = \left(\frac{18x+y}{7}, \frac{24y-107x}{7}\right)$$

c) ¿Es T biyectiva? Justifique.

Respuesta:
T es biyectiva $\Leftrightarrow$ T es invertible $\Leftrightarrow$ $\left[T\right]_B$ es invertible. Y como,

$$det\left(\left[T\right]_B\right) = det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 11 \neq 0$$

Entonces, $\left[T\right]_B$ es invertible, por tanto T es invertible, de modo que es biyectiva.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal, tal que $\left[T\right]_C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

a) Determine una base del Núcleo de T.

Respuesta:
Por la fórmula de coordenadas, $\left[T(a,b,c)\right]_C = \left[T\right]_C \cdot \left[(a,b,c)\right]_C$. Entonces,

$$(a,b,c)^t \in Ker(T) \quad \Leftrightarrow \quad T(a,b,c) = (0,0,0)^t \quad \Leftrightarrow \quad \left[T(a,b,c)\right]_C = (0,0,0)^t$$

Entonces, $(a,b,c) \in Ker(T)$ si y sólo si, $\left[(a,b,c)\right]_C$ está en el espacio nulo de la matriz $\left[T\right]_C$.

$$\Rightarrow \quad \left[T\right]_C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2f_1 + f_3]{-3f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{8}f_3]{-\frac{1}{5}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3f_2 + f_1]{-f_2 + f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left[(a,b,c)\right]_C = \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

son las coordenadas de (a,b,c) respecto a la base canónica, por lo tanto, $(a,b,c) = (t,t,-t)$.

Entonces, $Ker(T) = \{(t,t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. De modo que $\{(1,1,-1)\}$ es una base de $Ker(T)$.

b) Determine una base $Img(T)$.

Respuesta:
Sea $A = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera, buscamos $Img(T)$.

Por la fórmula de coordenadas, lo que buscamos es determinar si existe un vector $B \in \mathbb{R}^3$ tal que $A = T(B)$, es decir, un B que cumpla:

$$\left[A = (a,b,c)\right]_C = \left[T(B)\right]_C = \left[T\right]_C \cdot \left[B\right]_C$$

Y como C es la base canónica, $\left[A\right]_C = (a,b,c)^t$. De lo anterior, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} A \in Img(T) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \ B \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(B) = A \\ &\Leftrightarrow \quad \left[B\right]_C \text{ son solución del sistema} \\ &\qquad \left[A\right]_C = \left[T\right]_C \cdot \left[B\right]_C \end{aligned}$$

Entonces,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & a \\ 3 & 4 & 7 & b \\ -2 & 2 & 0 & c \end{array}\right) \begin{array}{c} -3f_1+f_2 \\ \longrightarrow \\ 2f_1+f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & a \\ 0 & -5 & -5 & b-3a \\ 0 & 8 & 8 & c+2a \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} -\frac{1}{5}f_2 \\ \longrightarrow \\ \frac{1}{8}f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3a-b}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2a+c}{8} \end{array}\right) \begin{array}{c} -f_2+f_3 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3a-b}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-7a}{20}+\frac{b}{5}+\frac{c}{8} \end{array}\right)$$

Entonces el sistema tiene solución, sólamente si

$$\begin{aligned} \frac{-7a}{20} + \frac{b}{5} + \frac{c}{8} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -14a + 8b + 5c = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad c = \frac{14}{5}a - \frac{8}{5}b \end{aligned}$$

Entonces, $Img(T) = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -14a + 8b + 5c = 0\right\}$, es un plano que pasa por el origen. Por tanto,

$$Img(T) = \left\{\left(a, b, \frac{14}{5}a - \frac{8}{5}b\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

Para encontar una base, separamos los parámetros,

$$\begin{aligned} \left(a, b, \frac{14}{5}a - \frac{8}{5}b\right) &= \left(a, 0, \frac{14}{5}a\right) + \left(0, b, -\frac{8}{5}b\right) \\ &= a\left(1, 0, \frac{14}{5}\right) + b\left(0, 1, -\frac{8}{5}\right) \end{aligned}$$

Entonces, una base para $Img(T)$ es $\mathbb{B} = (5,0,14), (0,5,8)$. Nótese que tomamos vectores paralelos para utilizar vectores en la base que no tengan fracciones.

c) Determine si T es invertible o no es invertible.

Respuesta:
Como $Ker(T) \neq \{(0,0,0)\}$, entonces T no es inyectiva, y como $dim(Img(T)) = 2 < 3 = dim(\mathbb{R}^3)$, entonces $Img(T) \neq \mathbb{R}^3$, por lo tanto no es sobreyectiva.

Como no es inyectiva ni sobreyectiva, no es biyectiva, entonces T no es invertible.

5. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 4x_2 - 2x_3, 2x_1 + 5x_2 - 4x_3, -x_1 + 2x_3, -3x_1 + 7x_2 + 6x_3)$$

a) Verifique que T es transformación lineal.

Respuesta:
T es una transformación lineal pues envía una combinación lineal en $\mathbb{R}^3$ a una combinación lineal en $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} T\left(c \cdot (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)\right) &= T(cx_1 + y_1, cx_2 + y_2, cx_3 + y_3) \\ = ((cx_1 + y_1) - 4(cx_2 + y_2) - 2(cx_3 + y_3), &\, 2(cx_1 + y_1) + 5(cx_2 + y_2) - 4(cx_3 + y_3), \\ -(cx_1 + y_1) + 2(cx_3 + y_3), &-3(cx_1 + y_1) + 7(cx_2 + y_2) + 6(cx_3 + y_3)) \\ = c \cdot (x_1 - 4x_2 - 2x_3, 2x_1 + 5x_2 &- 4x_3, -x_1 + 2x_3, -3x_1 + 7x_2 + 6x_3) \\ + (y_1 - 4y_2 - 2y_3, 2y_1 + 5y_2 &- 4y_3, -y_1 + 2y_3, -3y_1 + 7y_2 + 6y_3) \\ &= c \cdot T(x_1, x_2, x_3) + T(y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

Sea C_1 la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y C_2 la base canónica de $\mathbb{R}^4$, entonces la matriz de T en esas bases es:

$$A = \left[T\right]_{C_1}^{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

De este modo la transformación lineal T se puede escribir en la forma matricial,

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Note que aquí los vectores se están tratando como columnas, pero en realidad, de la forma original de T se tiene que son filas.

b) Determine una base para el subespacio Núcleo de T.

Respuesta:
Por definición, $Ker(T) = Nuc(T) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; T(x) = 0, \text{ con } 0 \in \mathbb{R}^4\right\}$.
Entonces, $Ker(T) = EspacioNulo(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; Ax = 0\right\}$. Por tanto, lo que necesitamos es una base del espacio nulo de A.

$$A \begin{array}{c} -2f_1 + f_2 \\ \longrightarrow \\ f_1 + f_3 \\ 3f_1 + f_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \frac{1}{13}f_2 \\ \longrightarrow \\ \frac{-1}{4}f_3 \\ \frac{-1}{5}f_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 4f_2 + f_1 \\ \longrightarrow \\ -f_2 + f_3 \\ -f_2 + f_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $Ker(T) = \{(2t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, por lo tanto, obtenemos una base separando el parámetro, es decir, como $(2t, 0, t) = t(2, 0, 1)$, entonces, $\mathbb{B}_{ker(T)} = \{(2, 0, 1)\}$ es una base de $Ker(T)$.

c) Determine una base para el subespacio Imagen de T.

Respuesta:
Por definición,

$$Img(T) = \left\{ y \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } y = T(x) \right\} = EspacioColumna(A)$$

Entonces, una base para $Img(T)$ es una base para el $EspacioColumna(A)$. De la parte b),

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Como las columnas de A que corresponden a las columnas de R con el primer 1 de cada fila son la 1 y la 2, entonces

$$\mathbb{B}_{Img(T)} = \{(1, 2, -1, -3), (-4, 5, 0, 7)\}$$

es una base de la imagen de T, porque sus transpuestas son una base del espacio columna de A.

d) Determine si T es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Respuesta:
T no es inyectiva pues $Ker(T) \neq \{(0, 0, 0)\}$. T no es sobreyectiva pues $dim\,(Img(T)) = 2$, entonces $Img(T)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ que no es $\mathbb{R}^4$ ya que su dimensión es menor a 4. Entonces T no es biyectiva pues no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

6. Sea $B_1 = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$ una base de $\mathbb{R}^4$ y sea $B_2 = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$.

Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que:
$T(1, 0, 1, 1) = (1, 2, 3)$; $T(0, 1, 1, 0) = (0, 1, 1)$; $T(0, 0, 1, 1) = (0, 2, 2)$; $T(0, 1, 0, 1) = (2, 4, 6)$.

a) Determine $\left[T\right]_{B_1}^{B_2}$.

Respuesta:
Por definición, $\left[T\right]_{B_1}^{B_2}$ es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de las imágenes de la base $\mathbb{B}_1$, respecto a la base $\mathbb{B}_2$. Dicha matriz se puede calcular resolviendo el siguiente sistema aumentado:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} -f_1 + f_2 \\ \longrightarrow \\ -f_1 + f_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_3+f_2}\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)\xrightarrow{f_2+f_1}\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_2}\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left[T\right]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Utilice la parte (a) para determinar la fórmula general de la transformación dada por $T(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Respuesta:

La idea aquí es utilizar la fórmula de coordenadas, $\left[T\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)\right]_{B_2} = \left[T\right]_{B_1}^{B_2} \cdot \left[(x_1, x_2, x_3, x_4)\right]_{B_1}$.

Entonces, primero procedemos a calcular $\left[(x_1, x_2, x_3, x_4)\right]_{B_1}$. Para eso usamos el sistema;

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right)\xrightarrow[-f_1+f_4]{-f_1+f_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & x_3-x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x_4-x_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_2+f_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & x_3-x_1-x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x_4-x_1 \end{array}\right)\xrightarrow{-f_3+f_4}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & x_3-x_1-x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & x_4-x_3+x_2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}f_4}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -x_1-x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x_2-x_3+x_4}{2} \end{array}\right)\xrightarrow[f_4+f_3]{-f_4+f_2}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{x_2+x_3-x_4}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2x_1-x_2+x_3+x_4}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{x_2-x_3+x_4}{2} \end{array}\right)$$

Por tanto,

$$\left[(x_1, x_2, x_3, x_4)\right]_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_2+x_3-x_4}{2} \\ \frac{-2x_1-x_2+x_3+x_4}{2} \\ \frac{x_2-x_3+x_4}{2} \end{pmatrix}$$

Entonces, utilizando la fórmula de coordenadas,

$$\left[T\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_2+x_3-x_4}{2} \\ \frac{-2x_1-x_2+x_3+x_4}{2} \\ \frac{x_2-x_3+x_4}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1+x_2-x_3+x_4 \\ \frac{3x_2-x_3+5x_4}{2} \end{pmatrix}$$

Como este vector son las coordenadas de $T\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$ en la base B_2, para encontrar su valor, se debe de escribir como combinación lineal de la base. Entonces, la forma explícita de T es;

$$\begin{aligned} T\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) &= 0 \cdot (1,1,1) + \left(x_1+x_2-x_3+x_4\right) \cdot (1,0,1) + \left(\frac{3x_2-x_3+5x_4}{2}\right) \cdot (0,1,1) \\ &= \left(x_1+x_2-x_3+x_4, \frac{3x_2-x_3+5x_4}{2}, \frac{2x_1+5x_2-3x_3+7x_4}{2}\right) \end{aligned}$$

7. Se define $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ por $T(x, y, z, w) = (0, x, y, z)$.

   a) Pruebe que T es una aplicación lineal.

   Respuesta:
   Para que T sea una transformación lineal, es necesario que envíe una combinación lineal en $\mathbb{R}^4$ a una combinación lineal en $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} T(c \cdot (x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2)) &= T(cx_1 + x_2, cy_1 + y_2, cz_1 + z_2, cw_1 + w_2) \\ &= (0, cx_1 + x_2, cy_1 + y_2, cz_1 + z_2) = (0, cx_1, cy_1, cz_1) + (0, x_2, y_2, z_2) \\ &= c \cdot (0, x_1, y_1, z_1) + (0, x_2, y_2, z_2) \\ &= c \cdot T(x_1, y_1, z_1, w_1) + T(x_2, y_2, z_2, w_2) \end{aligned}$$

   Por tanto T es una transformación lineal.

   b) Halle una base para el núcleo de T.

   Respuesta:
   Por definición, $Ker(T) = Nuc(T) = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; T(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)\right\}$. Pero entonces,

$$(x, y, z, w) \in Ker(T) \quad \Leftrightarrow \quad T(x, y, z, w) = (0, x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0$$

   Entonces, $Ker(T) = \{(0, 0, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Entonces, una base para el núcleo de T es, $\mathbb{B}_{Ker(T)} = \{(0, 0, 0, 1)\}$.

   c) Halle una base para la imagen de T.

   Respuesta:
   Por la manera en que T está definida, $Img(T) = \{(0, a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Esto porque la primera entrada claramente debe ser siempre cero, y si $(0, a, b, c) \in \mathbb{R}^4$, entonces $(a, b, c, 1)$ es una preimagen de $(0, a, b, c)$. Entonces, separando parámetros;

$$(0, a, b, c) = a(0, 1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 0) + c(0, 0, 0, 1)$$

   Entonces, $\mathbb{B}_{Img(T)} = \{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es una base de $Img(T)$.

   d) Considere la base $\mathbb{B} = \{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 0)\}$, de $\mathbb{R}^4$ y determine la matriz $\left[T\right]_{\mathbb{B}}$.

   Respuesta:
   Por definición, la matriz $\left[T\right]_{\mathbb{B}}$ es la matriz cuyas columnas son las coordenadas en la base $\mathbb{B}$, de la imagen de los vectores de la base $\mathbb{B}$ en T.

   Para calcular la matriz, entonces primero necesitamos las imagenes de la base $\mathbb{B}$ en T;

$$T(1,0,0,1) = (0,1,0,0),\quad T(-1,0,0,1) = (0,-1,0,0)$$
$$T(0,1,1,0) = (0,0,1,1),\quad T(0,1,-1,0) = (0,0,1,-1)$$

Ahora, resolvemos el sistema aumentado;

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{-f_2+f_3}{\overset{-f_1+f_4}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\frac{1}{2}f_4}{\overset{\frac{-1}{2}f_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \underset{-f_3+f_2}{\overset{f_4+f_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$$

Entonces,

$$\left[T\right]_{\mathbb{B}} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$$

8. Sea $\overrightarrow{a}$ un vector fijo de $\mathbb{R}^2$ distinto de cero. Determine, justificando, si la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que se define a continuación, es una transformación lineal, o no lo es

 a) $T(X) = \left(\overrightarrow{a} \cdot X\right) X$

 Respuesta:
 Sea $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^2$ un vector fijo distinto de cero, $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$. Sea $c \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathbb{R}^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} T\left(cX+Y\right) &= \left(\overrightarrow{a}\left(cX+Y\right)\right)\cdot\left(cX+Y\right) = \left(c\overrightarrow{a}\cdot X + \overrightarrow{a}\cdot Y\right)\cdot\left(cX+Y\right) \\ &= \left(c\overrightarrow{a}\cdot X + \overrightarrow{a}\cdot Y\right)\cdot cX + \left(c\overrightarrow{a}\cdot X + \overrightarrow{a}\cdot Y\right)\cdot Y \\ &= c^2\left(\overrightarrow{a}\cdot X\right)\cdot X + c\left(\overrightarrow{a}\cdot Y\right)\cdot X + c\left(\overrightarrow{a}\cdot X\right)\cdot Y + \left(\overrightarrow{a}\cdot Y\right)\cdot Y \\ &= c^2 T\left(X\right) + c\left(\overrightarrow{a}\cdot Y\right)\cdot X + c\left(\overrightarrow{a}\cdot X\right)\cdot Y + T\left(Y\right) \quad (\star) \end{aligned}$$

 entonces T no es una transformación lineal. Esto se puede observar por la presencia de términos mixtos y la constante al cuadrado. Por ejemplo, con $c = 1$, $X = e_1$ y $Y = e_2$ los vectóres canónicos, se tiene,

$$T(X) = T(1,0) = ((a_1,a_2)\cdot(1,0))\cdot(1,0) = (a_1, 0)$$

$$T(X) = T(0,1) = ((a_1, a_2) \cdot (0,1)) \cdot (0,1) = (0, a_2)$$

Entonces, $cT(X) + T(Y) = (a_1, a_2) = \overrightarrow{a}$. Por otro lado, $cX + Y = (1,1)$, entonces, de la fórmula $(\star)$,

$$\begin{aligned} T(cX+Y) &= 1^2 \cdot (a_1, 0) + 1 \cdot ((a_1, a_2) \cdot (0,1)) \cdot (1,0) + 1 \cdot ((a_1, a_2) \cdot (1,0)) \cdot (0,1) + (0, a_2) \\ &= (a_1, 0) + (a_2, 0) + (0, a_1) + (0, a_2) = (a_1, a_2) + (a_2, a_1) = \overrightarrow{a} + (a_2, a_1) \end{aligned}$$

De modo que, $T(cX + Y) \neq cT(X) + T(Y)$, por tanto T no es transformación lineal.

b) $T(X) = \left(\overrightarrow{a} \cdot X\right)\overrightarrow{a}$

Respuesta:
Sea $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^2$ un vector fijo distinto de cero. Sea $c \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathbb{R}^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} T(cX+Y) &= \left(\overrightarrow{a} \cdot (cX+Y)\right) \cdot \overrightarrow{a} = \left(c\left(\overrightarrow{a} \cdot X\right) + \overrightarrow{a} \cdot Y\right) \cdot \overrightarrow{a} \\ &= c\left(\overrightarrow{a} \cdot X\right) \cdot \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{a} \cdot Y\right) \cdot \overrightarrow{a} = cT(X) + T(Y) \end{aligned}$$

entonces T es una transformación lineal.

9. Se define la función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ por,

$$T(x,y,z) = (x + 2y, y, x + 2y - z, 2x + 2y, x + 2y + z)$$

a) Muestre que T es una transformación lineal inyectiva.

Respuesta:
Sean $\mathbb{C}_1$ y $\mathbb{C}_2$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^5$, respectivamente. Entonces la matriz de T respecto a estas bases es:

$$\left[T\right]_{\mathbb{C}_1}^{\mathbb{C}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

pues, $T(1,0,0) = (1,0,1,2,1)$, $T(0,1,0) = (2,1,2,2,2)$ y $T(0,0,1) = (0,0,-1,0,1)$.
Ahora, como $\mathbb{C}_1$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, entonces $Ker(T) = Nuc(T) = EspacioNulo\left(\left[T\right]_{\mathbb{C}_1}^{\mathbb{C}_2}\right)$.

Por lo tanto, T es inyectiva si

$$EspacioNulo\left(\left[T\right]_{\mathbb{C}_1}^{\mathbb{C}_2}\right) = \{(0,0,0)\}$$

Entonces,

$$\left[T\right]_{\mathbb{C}_1}^{\mathbb{C}_2} \begin{array}{c} -f_1+f_3 \\ \longrightarrow \\ -f_1+f_5 \\ -2f_1+f_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -2f_2+f_1 \\ \longrightarrow \\ f_3+f_5 \\ 2f_2+f_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $Ker(T) = EspacioNulo\left(\left[T\right]_{\mathbb{C}_1}^{\mathbb{C}_2}\right) = \{(0,0,0)\}$, entonces T es inyectiva.

b) Halle una base para la imagen de T.

Respuesta:
Por teorema, sabemos que las dimensiones de $\mathbb{R}^3$, de $Ker(T)$ y de $Img(T)$ están relacionadas por la identidad,

$$3 = dim\left(\mathbb{R}^3\right) = dim\left(Ker(T)\right) + dim\left(Img(T)\right)$$

y por la parte a), como T es inyectiva, entonces $dim\left(Ker(T)\right) = 0$, entonces se concluye que $dim\left(Img(T)\right) = 3$. Por lo tanto, se necesitan 3 vectores para encontrar una base de $Img(T)$.

Como $\mathbb{C}_2$ es la bse canónica de $\mathbb{R}^5$, entonces $Img(T) = EspacioColumna\left(\left[T\right]_{\mathbb{C}_1}^{\mathbb{C}_2}\right)$. Y dado que,

$$\left[T\right]_{\mathbb{C}_1}^{\mathbb{C}_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, una base para la imagen de T es,

$$\{(1,0,1,2,1),(2,1,2,2,2),(0,0,-1,0,1)\}$$

10. Sean $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal, $\mathbb{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Si

$$T(e_1) = u_1, \quad T(e_2) = u_1 - 2u_2 + u_3, \quad T(e_3) = au_1 + bu_3$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Halle $\left[T\right]_{\mathbb{C}}^{\mathbb{B}}$.

Respuesta:
Por definición, las columnas de $\left[T\right]_{\mathbb{C}}^{\mathbb{B}}$ son las coordenadas de las imágenes de la base $\mathbb{C}$ en T, respecto a la base $\mathbb{B}$. Como,

$$T(e_1) = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$$

$$T(e_2) = 1 \cdot u_1 - 2 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3$$
$$T(e_3) = a \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + b \cdot u_3$$

entonces,

$$\left[T\right]_{\mathbb{C}}^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

b) ¿Para cuáles valores de los parámetros a y b, T es inyectiva?

Respuesta:
T es inyectiva si $Ker(T) = \{(0,0,0)\}$. Y note que, $\left[(0,0,0)\right]_{\mathbb{B}} = (0,0,0)^t$ y $EspacioNulo\left(\left[T\right]_{\mathbb{C}}^{\mathbb{B}}\right)$ son las coordenadas en la base $\mathbb{B}$ de los vectores del núcleo de T.

Se concluye que T es inyectiva si y sólo si $EspacioNulo\left(\left[T\right]_{\mathbb{C}}^{\mathbb{B}}\right) = \left\{(0,0,0)^t\right\}$, ya que el único vector con coordenadas $(0,0,0)^t$ es el vector $(0,0,0)$.

$$\left[T\right]_{\mathbb{C}}^{\mathbb{B}} \xrightarrow{-\frac{1}{2}f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[-f_2+f_3]{-f_2+f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = R$$

Entonces, de R, se obtienen los siguientes casos;
Si $b \neq 0$,

$$R \xrightarrow{\frac{1}{b}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

Si $a = 0$, $R = I_3$.

Si $a \neq 0$, $P \xrightarrow{-af_3+f_1} I_3$.

Si $b = 0$, entonces, $\forall a \in \mathbb{R}$, $Rng\left(\left[T\right]_{\mathbb{C}}^{\mathbb{B}}\right) = 2$.

Por lo tanto, sólo si $b \neq 0$ y $\forall a \in \mathbb{R}$, entonces $EspacioNulo\left(\left[T\right]_{\mathbb{C}}^{\mathbb{B}}\right) = \left\{(0,0,0)^t\right\}$ que se da si y sólo si T es inyectiva.

11. $\mathbb{B} = \{(1,1,-1,3),(0,0,1,0),(0,1,-2,2),(1,0,0,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es un operador lineal tal que

$$\left[T\right]_{\mathbb{C}}^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Determine $\left[T\right]_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}}$.

Respuesta:
Podemos usar la composición de transformaciones lineales con la identidad $I : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, y la fórmula de la matriz de una composición

$$\left[T\right]_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}} = \left[I \circ T\right]_{\mathbb{C}}^{\mathbb{C}} = \left[I\right]_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}} \cdot \left[T\right]_{\mathbb{C}}^{\mathbb{B}}$$

Entonces, necesitamos calcular $\left[I\right]_{\mathbb{C}}^{\mathbb{B}}$ que es la matriz de cambio de base de B a C en $\mathbb{R}^4$.

Claramente,

$$\left[I\right]_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, aplicando la fórmula de la matriz de una composición de transformaciones lineales,

$$\left[T\right]_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}} = \left[I\right]_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}} \cdot \left[T\right]_{\mathbb{C}}^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Considere la base $\mathbb{B} = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador lineal tal que

$$\left[T\right]_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcule $\left[I\right]_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}$; siendo $\mathbb{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Respuesta:
Buscamos la matriz de cambio de base $\mathbb{B}$ a la base $\mathbb{C}$. Entonces, escribimos la matriz aumentada donde del lado izquierdo colocamos la base a la que queremos llegar (base $\mathbb{C}$) y del lado derecho la base de donde partimos (base $\mathbb{B}$);

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Como a la izquierda tenemos la identidad, entonces la matriz de la derecha es $\left[I\right]_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}$. Entonces

$$\left[I\right]_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Determine $T(x,y,z)$.

Respuesta:
Por la fórmula de coordenadas, $\left[T(x,y,z)\right]_{\mathbb{B}} = \left[T\right]_{\mathbb{B}} \cdot \left[(x,y,z)\right]_{\mathbb{B}}$.

Primero procedemos a calcular las coordenadas del vector (x,y,z) en la base $\mathbb{B}$. Para eso usamos el sistema;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{-f_2+f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & z+y-x \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_3+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & 0 & x-z \\ 0 & 0 & 1 & z+y-x \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left[(x,y,z)\right]_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} x-y \\ x-z \\ z+y-x \end{pmatrix}$$

Entonces, utilizando la fórmula de coordenadas,

$$\left[T(x,y,z)\right]_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-y \\ x-z \\ z+y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y-z \\ -z \\ y+2z \end{pmatrix}$$

Como este vector son las coordenadas de $T(x,y,z)$ en la base $\mathbb{B}$, para encontrar su forma explícita, se debe de escribir como combinación lineal de la base. Entonces,

$$T(x,y,z) = (x-y-z)\cdot(1,0,1) + -z\cdot(1,1,0) + (y+2z)\cdot(1,1,1) = (x, y+z, x+z)$$

De modo que la transformación lineal T es $T(x,y,z) = (x, y+z, x+z)$.

13. Determine una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$ sea una base para el núcleo de T.

Respuesta:
Sean $v_1 = (1,0,1,0)$ y $v_2 = (0,1,0,1)$. Como $v_1 \cdot v_2 = 0$, entonces son ortogonales y por tanto son *li*. Para que sean base de $ker(T)$ la transformación debe cumplir que:

$$T(v_1) = T(1,0,1,0) = (0,0) \qquad T(v_2) = T(0,1,0,1) = (0,0)$$

Como queremos que v_1 y v_2 sean la base de $ker(T)$, entonces se tiene que $dim\,(ker(T)) = 2$, y por consiguiente por el teorema de las dimensiones

$$4 = dim\left(\mathbb{R}^4\right) = dim\,(ker(T)) + dim\,(Img(T)) = 2 + dim\,(Img(T))$$

Entonces, $dim\,(Img(T)) = 2$. Y como $dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2$, entonces T es una transformación sobreyectiva. Ahora, si $v_3 = (1,0,0,0)$ y $v_4 = (0,1,0,0)$, entonces los vectores v_1, v_2, v_3, v_4 son *li* y como son 4 vectores de $\mathbb{R}^4$ entonces son base. Como T es sobreyectiva, y $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es un conjunto que genera a $\mathbb{R}^4$ (pues es base), y como $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, entonces $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3), T(v_4)\}$ es un conjunto que genera a $\mathbb{R}^2$. Pero como $T(v_1) = (0,0) = T(v_2)$, entonces se debe cumplir que $T(v_3), T(v_4)$ deben de generar a $\mathbb{R}^2$. Para que esto sea cierto, podemos tomar

$$T(v_3) = T(1,0,0,0) = (1,0) \qquad T(v_4) = T(0,1,0,0) = (0,1)$$

Como una transformación lineal queda determinada por su efecto sobre una base, entonces si $\mathbb{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, la forma en que T queda determinada es: si $(x,y,z,w) = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4$, entonces

$$T(x,y,z,w) = c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + c_3T(v_3) + c_4T(v_4) = c_3(1,0) + c_4(0,1) = (c_3, c_4)$$

Entonces, $T(x,y,z,w) = (c_3, c_4)$ donde $(c_1, c_2, c_3, c_4)^t$ son las coordenadas del vector (x,y,z,w) en la base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Vamos a calcular la forma explícita de estas coordenadas:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & w \end{array}\right) \xrightarrow[-f_2+f_4]{-f_1+f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & -1 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & w-y \end{array}\right) \xrightarrow[f_4+f_2]{f_3+f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & -1 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & w-y \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-f_4]{-f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x-z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y-w \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \big[(x,y,z,w)\big]_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} z \\ w \\ x-z \\ y-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

Entonces, $T(x,y,z,w) = (x-z, y-w)$ es una transformación lineal que cumple con todas las condiciones pedidas.

10. Valores y vectores propios de operadores y matrices

1. Determine si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es o no diagonalizable.

   Respuesta:
   Calculamos el polinomio característico de A, $P_A(\lambda) = det\,(A - \lambda I_4)$.

   Note que,

$$A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)^2$$

   Por lo tanto, $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)^2$, de modo que los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$.

   Calculamos los subespacios propios:

   Para $\lambda_1 = 1$, $V_{\lambda=1} = EspacioNulo\,(A - I_4)$.

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{-f_2+f_4}{\overset{-f_2+f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-f_3+f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Entonces $V_{\lambda=1} = \{(t, 0, 0, 0) | t \in \mathbb{R}\}$, de modo que $B_{\lambda=1} = \left\{(1, 0, 0, 0)^t\right\}$ es una base.
   Por lo tanto, la multiplicidad geométrica es 1 y la multiplicidad algebraica es 2. De modo que A no es diagonalizable, porque las multiplicidades geométricas y algebraicas de un valor propio son distintas.

2. Los valores propios de la matriz $M = \begin{pmatrix} 13 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & -2 \\ -2 & -2 & 16 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = 12$ y $\lambda_2 = 18$. Calcule una matriz Q ortogonal y una matriz D diagonal tal que $Q^tMQ = D$.

   Respuesta:
   La matriz Q es la matriz cuyas columnas son una base ortonormal de vectores propios de M.

Subespacios propios:

Para $\lambda_1 = 12$, $V_{\lambda=12} = EspacioNulo\,(M - 12I_3)$, entonces,

$$M - 12I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \underset{2f_1+f_3}{\overset{-f_1+f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x + y - 2z = 0$$

Por lo tanto, $V_{\lambda=12} = \left\{(-s+2t, s, t)^t \middle| s, t \in \mathbb{R}\right\}$. Y como:

$$(-s+2t, s, t) = (-s, s, 0) + (2t, 0, t) = s(-1, 1, 0) + t(2, 0, 1)$$

Entonces, $B_{\lambda=12} = \{v_1, v_2\} = \left\{(-1, 1, 0)^t, (2, 0, 1)^t\right\}$ es una base de $V_{\lambda=12}$ de vectores propios de M.

Aplicamos Gram-Smith a esa base para covertirla en base ortogonal.

$$a_1 = v_1 = (-1, 1, 0) \quad \Rightarrow \quad \|a_1\|^2 = 2 \quad \|a_1\| = \sqrt{2}$$

Como, $v_2 \cdot a_1 = (2, 0, 1) \cdot (-1, 1, 0) = -2$, entonces,

$$a_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot a_1}{\|a_1\|^2} a_1 = (2, 0, 1) - \frac{-2}{2} \cdot (-1, 1, 0) = (1, 1, 1) \quad \Rightarrow \quad \|a_2\|^2 = 3 \quad \|a_2\| = \sqrt{3}$$

Por tanto, una base ortogonal de $V_{\lambda=12}$ está conformada por los vectores, a_1 y a_2. Para obtener una base ortonormal, normalizamos los vectores de la base ortogonal que acabamos de obtener.

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1, 1, 0) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$
$$b_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1, 1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Entonces, $C_{\lambda=12} = \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^t, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t\right\}$ es una base ortonormal de $V_{\lambda=12}$.

Para $\lambda_2 = 18$, $V_{\lambda=18} = EspacioNulo\,(M - 18I_3)$.

$$M - 18I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{2f_2+f_3}{\overset{5f_2+f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & -24 & -12 \\ 1 & -5 & -2 \\ 0 & -12 & -6 \end{pmatrix} \underset{\frac{-1}{6}f_3}{\overset{\frac{-1}{12}f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-f_1+f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{5f_1+f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{f_1 \Leftrightarrow f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{-1}{2}z \\ y = \frac{-1}{2}z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x = -z \\ 2y = -z \end{cases}$$

Por lo tanto, $V_{\lambda=18} = \left\{(t,t,-2t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Y como $(t,t,-2t) = t(1,1,-2)$, entonces $B_{\lambda=18} = \left\{(1,1,-2)^t\right\}$ es una base de $V_{\lambda=18}$.

Para encontrar una base ortonormal de $V_{\lambda=18}$, en este caso, basta con normalizar al único vector de la base. Y como $\|(1,1,-2)\|^2 = 6$, entonces,

$$\frac{1}{\|(1,1,-2)\|} \cdot (1,1,-2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

Entonces, $C_{\lambda=18} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)^t\right\}$ es base ortonormal de $V_{\lambda=18}$.

Por lo tanto, $\mathbb{C} = C_{\lambda=12} \cup C_{\lambda=18} = \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^t, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t, \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)^t\right\}$, es una base ortonormal de vectores propios de M, porque los vectores propios asociados a distintos valores propios son ortogonales entre sí.

Entonces la matriz ortogonal a Q es,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

y la matriz diagonal D similar a M es la matriz,

$$D = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

   a) Calcule los valores propios de A.

   Respuesta:
   El polinomio característico de A es;

$$P_A(\lambda) = det\,(A - \lambda I_3) = det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 1)\cdot(\lambda-2)^2$$

   Entonces los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Los subespacios propios:
   Para $\lambda = 1$, $V_{\lambda=1} = EspacioNulo\,(A - I_3)$.

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4f_2 + f_1 \\ \longrightarrow \\ 3f_2 + f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -f_3 + f_2 \\ \longrightarrow \\ -2f_3 + f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -f_2 \\ \longrightarrow \\ \frac{1}{3}f_3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_1 \Leftrightarrow f_2 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_2 \Leftrightarrow f_3 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $V_{\lambda=1} = \left\{ \left(t, \frac{-t}{3}, t\right)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$. Entonces, para determinar una base, $\left(t, \frac{-t}{3}, t\right) = t\left(1, \frac{-1}{3}, 1\right)$.

Podemos tomar, $B_{\lambda=1} = \left\{ \left(1, \frac{-1}{3}, 1\right)^t \right\}$. Entonces, la multiplicidad geométrica y algebraica son iguales a 1.

Para $\lambda = 2$, $V_{\lambda=2} = EspacioNulo\,(A - 2I_3)$.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -f_1 + f_3 \\ \longrightarrow \\ -f_1 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -3f_2 + f_1 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_1 \Leftrightarrow f_2 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $V_{\lambda=2} = \left\{ (2s + 2t, s, t)^t \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$. Entonces, para obtener una base,

$$(2s + 2t, s, t) = (2s, s, 0) + (2t, 0, t) = s\,(2, 1, 0) + t\,(2, 0, 1)$$

Una base de $V_{\lambda=2}$, es $B_{\lambda=2} = \left\{ (2, 1, 0)^t, (2, 0, 1)^t \right\}$. Entonces, la multiplicidad geométrica y algebraica son iguales a 2.

b) Determine si A es diagonalizable o no.

Respuesta:
Para $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$, la multiplicidad geométrica y algebraicas son iguales, por teorema, A es diagonalizable, y la matriz C que diagonaliza a A es,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \frac{-1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es la matriz diagonal que es similar a A.

4. $\lambda = 2$ es el único valor propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Halle una base para el espacio propio V_2 asociado al valor propio $\lambda = 2$.

Respuesta:

Sabemos que, $V_2 = \mathit{EspacioNulo}(A - 2I_4)$. Y como,

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, claramente, $V_2 = \left\{(s,0,0,t)^t \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R}\right\}$. Para obtener una base, separamos los parámetros, $(s,0,0,t) = s(1,0,0,0) + t(0,0,0,1)$. Entonces, $\mathbb{B}_{V_2} = \left\{(1,0,0,0)^t, (0,0,0,1)^t\right\}$ es base de V_2.

b) (10 puntos) ¿Es la matriz A diagonalizable? (Justifique su respuesta).

Respuesta:
Note que $\lambda = 2$ es el único valor propio de A, esto porque su polinomio característico es:

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I_4) = det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^4$$

Entonces, $\lambda = 2$ tiene multiplicidad algebraica 4. Y como su subespacio propio V_2, tiene dimensión 2, entonces $\lambda = 2$ tiene multiplicidad geométrica 2. Como son distintas, por teorema, entonces A no es diagonalizable.

5. Sea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Halle una matriz C tal que

$$C^{-1}\,A\,C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Respuesta:
Como A es simétrica, entonces es ortogonalmente diagonalizable. Es decir, existen una matriz C ortogonal y una matriz D diagonal, tales que $C^{-1}AC = D$. Entonces, claramente la matriz D es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y entonces los valores propios de A son los elementos de la diagonal principal de D, es decir que, $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -1$ son los valores propios de A. Y por la teoría, sabemos también que la matriz C es la que tiene como columnas, una base ortonormal de vectores propios de A.

Calculamos los subespacios propios asociados a cada valor propio de A:
Para $\lambda = 1$; $V_{\lambda=1} = \mathit{EspacioNulo}\,(A - I_3)$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{f_1+f_3}{\overset{-f_1+f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{f_1 \Leftrightarrow f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_2 \Leftrightarrow f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, $V_{\lambda=1} = \left\{(t,-t,0)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Separamos el parámetro, y tenemos que $(t,-t,0) = t\,(1,-1,0)$, por lo tanto, $\mathbb{B}_{\lambda=1} = \left\{(1,-1,0)^t\right\}$ es una base de $V_{\lambda=1}$. Para encontrar una base ortonormal, normalizamos el vector de la base. Como, $\|(1,-1,0)\| = \sqrt{2}$, entonces,

$$\frac{1}{\|(1,-1,0)\|} \cdot (1,-1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Entonces, $\mathbb{B}^*_{\lambda=1} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)^t\right\}$ es una base ortonormal de $V_{\lambda=1}$.

Para $\lambda = 2$; $V_{\lambda=2} = \mathit{EspacioNulo}\,(A - 2I_3)$

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{-f_2}{\overset{f_1+f_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{-f_1}{\overset{-f_2+f_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, $V_{\lambda=2} = \left\{(t,t,t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Separamos el parámetro para encontrar una base: $(t,t,t) = t\,(1,1,1)$, por lo tanto, $\mathbb{B}_{\lambda=2} = \left\{(1,1,1)^t\right\}$ es una base de $V_{\lambda=2}$. Ahora, normalizamos el vector de la base. Como, $\|(1,1,1)\| = \sqrt{3}$, entonces,

$$\frac{1}{\|(1,1,1)\|} \cdot (1,1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Entonces, $\mathbb{B}^*_{\lambda=2} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t\right\}$ es una base ortonormal de $V_{\lambda=2}$.

Para $\lambda = -1$; $V_{\lambda=-1} = \mathit{EspacioNulo}\,(A + I_3)$

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{-2f_3+f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}f_1+f_3}{\overset{f_1+f_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{f_2 \Leftrightarrow f_3}{\overset{\frac{-1}{2}f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{f_1 \Leftrightarrow f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, $V_{\lambda=-1} = \left\{(-t,-t,2t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Separamos el parámetro, y tenemos que $(-t,-t,2t) = t\,(-1,-1,2)$, por lo tanto, $\mathbb{B}_{\lambda=-1} = \left\{(-1,-1,2)^t\right\}$ es una base de $V_{\lambda=-1}$. Como, $\|(-1,-1,2)\| = \sqrt{6}$, entonces,

$$\frac{1}{\|(-1,-1,2)\|} \cdot (-1,-1,2) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Entonces, una base ortonormal de $V_{\lambda=-1}$ es $\mathbb{B}^*_{\lambda=-1} = \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^t\right\}$

Una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A es:

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}^*_{\lambda=1} \cup \mathbb{B}^*_{\lambda=2} \cup \mathbb{B}^*_{\lambda=-1} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)^t, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t, \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^t\right\}$$

Así, C es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base anterior, es decir, C es la matriz dada por;

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halle el polinomio característico de A.

Respuesta:
Calculamos el polinomio característico de A, $P_A(\lambda) = det\,(A - \lambda I_3)$.

Note que, $A - \lambda I_3$ es triangular,

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & a-2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Entonces, $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)$, es el polinomio característico de A. De modo que los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$.

b) $\lambda = 1$ es un valor propio de A. Sea $V_{\lambda=1}$ el subespacio propio correspondiente a este valor propio.

1) Determine los valores de a para los cuales la dimensión de $V_{\lambda=1}$ es igual a 1.

Respuesta:
Como $V_{\lambda=1} = EspacioNulo\,(A - I_3)$, entonces

$$dim\,(V_{\lambda=1}) = dim\,(EspacioNulo\,(A - I_3)) = 3 - Rng\,(A - I_3)$$

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 2$,

$$A - I_3 \overset{\frac{1}{a-2}f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-f_1+f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $Rng\,(A - I_3)\,2$ y $dim\,(V_{\lambda=1}) = 1$

2) Determine los valores de a para los cuales la dimensión de $V_{\lambda=1}$ es igual a 2.

Respuesta:
Si $a = 2$, $Rng\,(A - I_3) = 1$ y entonces, $dim\,(V_{\lambda=1}) = 2$.

c) Determine los valores de a para los cuales la matriz A es diagonalizable; y en este caso, halle una matriz invertible C tal que $C^{-1}AC$ sea diagonal.

Respuesta:
A es diagonalizable si para cada valor propio, las multiplicidades geométricas y algebraicas son iguales.

Como, para $\lambda = 1$; multiplicidad algebraica=2 y multiplicidad geométrica=$dim\,(V_{\lambda=1})$. Entonces, si $a = 2$, por la parte b), se tiene que $dim\,(V_{\lambda=1}) = 2$ y las multiplicidades son iguales para el valor propio $\lambda = 1$.

Para el valor $\lambda = 2$, como la multiplicidad algebraica=1 y multiplicidad geométrica=$dim\,(V_{\lambda=2})$, y dado que para que A sea diagonalizable se necesita que $3 = dim\,(V_{\lambda=1}) + dim\,(V_{\lambda=2})$, por lo tanto, si $a = 2$ se sigue que $dim\,(V_{\lambda=2}) = 1$ y las multiplicidades son iguales para el valor propio $\lambda = 2$.

Entonces, A es diagonalizable si $a = 2$.
Calculamos los subespacios propios:

Por la parte b), para $\lambda = 1$, $V_{\lambda=1} = EspacioNulo\,(A - I_3)$.

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces, $V_{\lambda=1} = \left\{(s, -t, t)^t \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R}\right\}$, por lo tanto, $B_{\lambda=1} = \left\{(1, 0, 0)^t, (0, -1, 1)^t\right\}$ es una base de $V_{\lambda=1}$.

Para $\lambda = 2$, $V_{\lambda=2} = EspacioNulo\,(A - 2I_3)$.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{f_2+f_3}{\overset{-f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces, $V_{\lambda=2} = \left\{(0, s, 0)^t \;\middle|\; s \in \mathbb{R}\right\}$, por lo tanto, $B_{\lambda=2} = \left\{(0, 1, 0)^t\right\}$ es una base de $V_{\lambda=2}$.

Entonces,

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}_{\lambda=1} \cup \mathbb{B}_{\lambda=2} = \left\{(1,0,0)^t, (0,-1,1)^t, (0,1,0)^t\right\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores propios de A.

Por lo tanto, si $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces C y D cumplen que, $C^{-1}AC = D$.
Por tanto, C es la matriz buscada.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determine los valores propios de A.

Respuesta:
El polinomio característico de A es

$$P_A(\lambda) = det\,(A - \lambda I_3) = det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

Entonces los dos valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$

b) Para cada valor propio de A halle una base para su espacio propio asociado.

Respuesta:
Calculamos los subespacios propios:

Para $\lambda_1 = 1$, $V_{\lambda=1} = EspacioNulo\,(A - I_3)$.

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_1+f_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_1+f_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{-1}{2}f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $V_{\lambda=1} = \left\{(t,0,t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$, de modo que $B_{\lambda=1} = \left\{(1,0,1)^t\right\}$ es una base del subespacio propio $V_{\lambda=1}$.

Para $\lambda_2 = 2$, $V_{\lambda=2} = EspacioNulo\,(A - 2I_3)$.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_3+f_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 \Leftrightarrow f_3]{-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $V_{\lambda=2} = \left\{(t,t,t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$, de modo que $B_{\lambda=2} = \left\{(1,1,1)^t\right\}$ es una base del subespacio propio $V_{\lambda=2}$.

c) ¿Es la matriz A diagonalizable?

Respuesta:
Para $\lambda_1 = 1$ la multiplicidad algebraica es 2, pero la multiplicidad geométrica es 1. Entonces por teorema, se sigue que A no puede ser diagonalizable.

8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador lineal definido por

$$T(x,y,z) = (5x + 4y + z, 4x + 8y - 4z, x - 4y + 5z)$$

Si T es ortogonalmente diagonalizable halle una base ortonormal B de $\mathbb{R}^3$ tal que $\left[T\right]_B$ sea una matriz diagonal; en caso contrario justifique por qué T no es ortogonalmente diagonalizable.

Respuesta:
La matriz A de T en la base canónica C de $\mathbb{R}^3$ es $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \left[T\right]_C$.

Como A es simétrica entonces T es ortogonalmente diagonalizable. Buscamos una base B ortonormal formada por vectores propios de A y de modo que $\left[T\right]_B$ sea una matriz diagonal con los valores propios de A en la diagonal principal.

El polinomio característico de A es

$$P_A(\lambda) = det\,(A - \lambda I_3) = det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 & 1 \\ 4 & 8-\lambda & -4 \\ 1 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\,(\lambda - 6)\,(\lambda - 12)$$

Entonces $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$ y $\lambda_3 = 12$ son los 3 valores propios de A.

Calculamos los subespacios propios:

Para $\lambda_1 = 0$, $V_{\lambda=0} = EspacioNulo\,(A)$, entonces,

$$A \underset{-4f_3+f_2}{\overset{-5f_3+f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 24 & -24 \\ 0 & 24 & -24 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \overset{-f_1+f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 24 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{24}f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{4f_1+f_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $V_{\lambda=0} = \left\{(-t,t,t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Entonces, $v_1 = (-1,1,1)^t$ es una base de $V_{\lambda=0}$. Para encontrar una base ortonormal sólamente es necesario normalizar a v_1. Como $\|v_1\| = \sqrt{3}$, entonces $a_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$ es tal que $B_{\lambda=0} = \{a_1\}$ es base ortonormal de $V_{\lambda=0}$.

Para $\lambda_2 = 6$, $V_{\lambda=6} = \mathit{EspacioNulo}\,(A - 6I_3)$, entonces,

$$A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \underset{4f_1+f_2}{\overset{f_1+f_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{18}f_2}{\overset{-f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{4f_2+f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $V_{\lambda=6} = \left\{(t,0,t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Entonces, $v_2 = (1,0,1)^t$ es una base de $V_{\lambda=6}$. Para encontrar una base ortonormal sólamente es necesario normalizar a v_2. Como $\|v_2\| = \sqrt{2}$, entonces $a_2 = \frac{1}{\|v_2\|}v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t$ es tal que $B_{\lambda=6} = \{a_2\}$ es base ortonormal de $V_{\lambda=6}$.

Para $\lambda_3 = 12$, $V_{\lambda=12} = \mathit{EspacioNulo}\,(A - 12I_3)$, entonces,

$$A - 12I_3 = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix} \underset{-4f_3+f_2}{\overset{7f_3+f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & -24 & -48 \\ 0 & 12 & 24 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{12}f_2}{\overset{-\frac{1}{24}f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\underset{4f_2+f_3}{\overset{-f_2+f_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_1 \Leftrightarrow f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $V_{\lambda=12} = \left\{(-t,-2t,t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Entonces, $v_3 = (-1,-2,1)^t$ es una base de $V_{\lambda=12}$. Para encontrar una base ortonormal normalizamos a v_3. Como $\|v_3\| = \sqrt{6}$, entonces $a_3 = \frac{1}{\|v_3\|}v_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^t$ es tal que $B_{\lambda=12} = \{a_3\}$ es base ortonormal de $V_{\lambda=12}$.

Entonces una base ortonormal de vectores propios de A es

$$B = B_{\lambda=0} \cup B_{\lambda=6} \cup B_{\lambda=12} = \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t, \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^t\right\}$$

Entonces en la base B la matriz $\left[T\right]_B$ es diagonal y toma la forma

$$\left[T\right]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

11. Formas cuadráticas, secciones cónicas y superficies cuadráticas

1. La ecuación $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$ representa una cónica.

   a) Efectúe un cambio de variable que corresponda a una rotación de ejes de manera que la ecuación en las nuevas variables tenga la forma canónica y escriba la ecuación en esas nuevas variables.

   Respuesta:
   Por simplificación, escriba la ecuación de la cónica en las variables x_1 y x_2, $5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 = 4$.

   En forma matricial, se escribe, $x^tAx = 4$, donde $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Buscamos los valores propios de A,

   $$P_A(\lambda) = det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda - 4)(\lambda - 6)$$

   Por lo tanto, $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 6$ son los valores propios de A.

   Los subespacios propios son:

   Para $\lambda_1 = 4$, $V_{\lambda=4} = \mathit{EspacioNulo}\,(A - 4I_2)$

   $$A - 4I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Entonces, $V_{\lambda=4} = \left\{(s,s)^t \;\middle|\; s \in \mathbb{R}\right\}$. Por tanto, $B_{\lambda=4} = \left\{(1,1)^t\right\}$ es una base. Como sólo contiene un vector, entonces para obtener una base ortonormal sólamente es necesario normalizar el vector. Como $\|(1,1)\| = \sqrt{2}$, entonces,

   $$\frac{1}{\|(1,1)\|} \cdot (1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

   De modo que $D_{\lambda=4} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t\right\}$ es una base ortonormal de $V_{\lambda=4}$.

   Para $\lambda_2 = 6$, $V_{\lambda=6} = \mathit{EspacioNulo}\,(A - 6I_2)$

   $$A - 6I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_1 + f_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Entonces, $V_{\lambda=6} = \left\{(-s,s)^t \;\middle|\; s \in \mathbb{R}\right\}$. Por tanto, $B_{\lambda=6} = \left\{(-1,1)^t\right\}$ es una base. Normalizamos el vector de la base. Como $\|(-1,1)\| = \sqrt{2}$, entonces,

   $$\frac{1}{\|(-1,1)\|} \cdot (-1,1) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

   De modo que $D_{\lambda=6} = \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t\right\}$ es una base ortonormal de $V_{\lambda=6}$.

Entonces, $\mathbb{B} = D_{\lambda=4} \cup D_{\lambda=6} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t, \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t \right\}$ es una base ortonormal de vectores propios de A. Por lo tanto, si C es la matriz;

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

el cambio de variable $y = C^t x$ elimina el término cruzado. De modo que la forma cuadrática equivalente es:

$$4y_1^2 + 6y_2^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_1^2 + \frac{y_2^2}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = 1$$

Entonces la cónica es una elipse en los nuevos ejes.

b) Determine los nuevos ejes y el ángulo de rotación.

Respuesta:
Los nuevos ejes son las rectas:

$$y_1 : \quad (x_1, x_2) = t(1,1) \quad \Rightarrow \quad \text{Eje } y_1 : \quad x_2 = x_1$$
$$y_2 : \quad (x_1, x_2) = t(-1,1) \quad \Rightarrow \quad \text{Eje } y_2 : \quad x_2 = -x_1$$

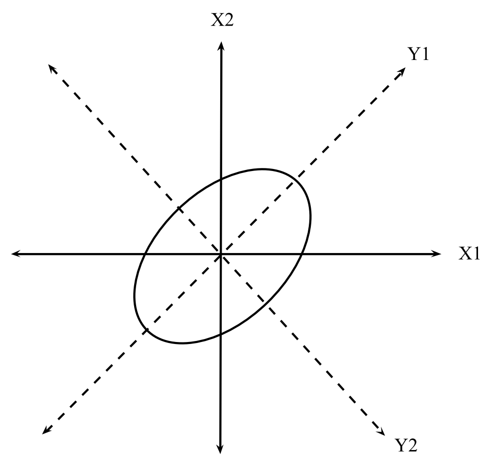
El ángulo de rotación es el ángulo entre el vector $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ y $e_1 = (1,0)$

$$cos\theta = (1,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

De modo que la rotación es de 45 grados.

c) Haga un gráfico de la cónica.

Respuesta:



2. La ecuación $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ representa una cónica. Y los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ son 4 y 9.

   a) Realice una rotación de los ejes x,y de modo que los nuevos ejes $\overline{x}$, $\overline{y}$ la ecuación de la cónica esté en su forma canónica. Escriba la ecuación canónica e identifique cuál cónica es.

   Respuesta:
   Calculamos los subespacios propios,
   Para $\lambda_1 = 4$, $V_{\lambda=4} = \mathit{EspacioNulo}\,(A - 4I_2)$.

$$A - 4I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Por lo tanto, $V_{\lambda=4} = \left\{(2t,t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Entonces, para obtener una base, $(2t,t) = t\,(2,1)$.
   Una base de $V_{\lambda=4}$, es $\left\{(2,1)^t\right\}$. Para encontrar una base ortonormal, sólamente necesitamos normalizar el vector. $\|(2,1)\| = \sqrt{5}$. Entonces;

$$\frac{1}{\|(2,1)\|} \cdot (2,1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

   Entonces, $\mathbb{B}_{\lambda=4} = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^t\right\}$ es base ortonormal de $V_{\lambda=4}$.
   Para $\lambda_2 = 9$, $V_{\lambda=9} = \mathit{EspacioNulo}\,(A - 9I_2)$.

$$A - 9I_2 = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{2}f_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \Leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Se sigue que, $V_{\lambda=9} = \left\{\left(\frac{-t}{2}, t\right)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Entonces, para obtener una base, $\left(\frac{-t}{2}, t\right) = t\left(\frac{-1}{2}, 1\right)$.
   Una base de $V_{\lambda=9}$, es $\left\{\left(\frac{-1}{2}, 1\right)^t\right\}$. Para encontrar una base ortonormal, normalizamos el vector. $\left\|\left(\frac{-1}{2}, 1\right)\right\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Entonces;

$$\frac{1}{\left\|\left(\frac{-1}{2}, 1\right)\right\|} \cdot \left(\frac{-1}{2}, 1\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

   Por tanto, $\mathbb{B}_{\lambda=9} = \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^t\right\}$ es base ortonormal de $V_{\lambda=9}$.
   Entonces, $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{\lambda=4} \cup \mathbb{B}_{\lambda=9} = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^t, \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^t\right\}$ es base ortonormal de vectores propios de A.

Tomando el cambio de variable $(z, w) = C^t \cdot (x, y)^t$, donde $C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal cuyas columnas son la base $\mathbb{B}$, se obtiene la forma cuadrática equivalente;

$$4z^2 + 9w^2 - 36 = 0 \iff \frac{4}{36}z^2 + \frac{9}{36}w^2 = 1$$

$$\frac{z^2}{3^2} + \frac{w^2}{2^2} = 1$$

Entonces en los nuevos ejes, la cónica es una elipse.

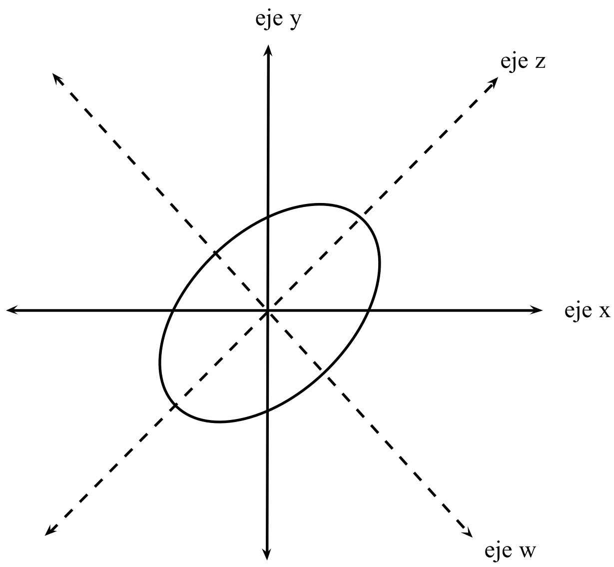
b) Calcúle el ángulo de rotación de sus ejes.

Respuesta:
Como el ángulo de rotación es el ángulo entre el eje x y el nuevo eje z, este mismo ángulo es el formado por los vectores directores de las rectas de los ejes,

$$cos\theta = e_1 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \theta \approx 26,56^\circ$$

c) Haga el gráfico de la cónica, el cuál debe ser claro y con suficientes detalles.

Respuesta:
La gráfica de la cónica es



3. La ecuación $3x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 - 11\sqrt{2}x_1 - 13\sqrt{2}x_2 + 24 = 0$ corresponde a una cónica.

a) Encuentre una transformación lineal que permita transformar dicha cónica a su forma canónica sin términos mixtos.

Respuesta:
La ecuación se escribe en la forma matricial como: $x^t Ax + Bx + l = 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = (-11\sqrt{2}, -13\sqrt{2}) \qquad l = 24$$

El polinomio característico de A es;

$$P_A(\lambda) = det\,(A - \lambda I_2) = det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 6)$$

Por tanto, $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 6$ son los dos valores propios de A.

Subespacios propios:
Para $\lambda = 0$; $V_{\lambda=0} = EspacioNulo\,(A)$

$$A \overset{-f_1+f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{3}f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $V_{\lambda=0} = \left\{(t, -t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Entonces, una base para $V_{\lambda=0}$ es $\mathbb{B}_{\lambda=0} = \left\{(1, -1)^t\right\}$.
Para encontrar una base ortonormal, basta con normalizar al único vector de la base. Como, $\|(1, -1)\| = \sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Entonces, $\mathbb{B}^*_{\lambda=0} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t\right\}$ es una base ortonormal de $V_{\lambda=0}$.

Para $\lambda = 6$; $V_{\lambda=6} = EspacioNulo\,(A - 6I_2)$

$$A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \overset{f_1+f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{-1}{3}f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $V_{\lambda=6} = \left\{(t, t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Entonces, una base para $V_{\lambda=6}$ es $\mathbb{B}_{\lambda=6} = \left\{(1, 1)^t\right\}$.
Una base ortonormal se obtiene al normalizar al único vector de la base. Como, $\|(1, 1)\| = \sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Entonces, una base ortonormal de $V_{\lambda=6}$ es $\mathbb{B}^*_{\lambda=6} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t\right\}$.

Una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios de A es:

$$\mathbb{B} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t\right\}$$

Tome C la matriz dada por;

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

que es una matriz ortogonal que diagonaliza ortogonalmente a A. El cambio de variable, $y = C^t x$ elimina los términos cruzados de la forma cuadrática $x^t A x$ de la ecuación matricial. Para los términos lineales,

$$(r,s) = B \cdot C = \left(-11\sqrt{2}, -13\sqrt{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = (2, -24)$$

Por lo tanto, la ecuación de la cónica equivalente es:

$$\begin{aligned} 0y_1^2 + 6y_2^2 + 2Y_1 - 24y_2 + 24 = 0 \\ \Rightarrow \quad 3y_2^2 + y_1 - 12y_2 + 12 = 0 \\ \Rightarrow \quad y_1 + 3y_2^2 - 12y_2 + 12 = 0 \\ \Rightarrow \quad y_1 + 3(y_2^2 - 4y_2) + 12 = 0 \\ \Rightarrow \quad y_1 = -3(y_2 - 2)^2 \end{aligned}$$

Tome, $z_1 = y_1$ y $z_2 = y_2 - 2$.

$$\Rightarrow \quad z_1 = -3z_2^2$$

es la ecuación en forma canónica de una parábola, que se abre hacia la parte negativa del eje y_1 y está centrada en $(0,2)$.

b) Determine el ángulo de rotación efectuado por dicha transformación.

Respuesta:
El ángulo de rotación es el que se forma entre los ejes x_1 y z_1, y por lo tanto entre $e_1 = (1,0)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ que son los vectores directores de esos ejes.

$$cos\theta = e_1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} = 45°$$

La rotación es 45 grados el en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

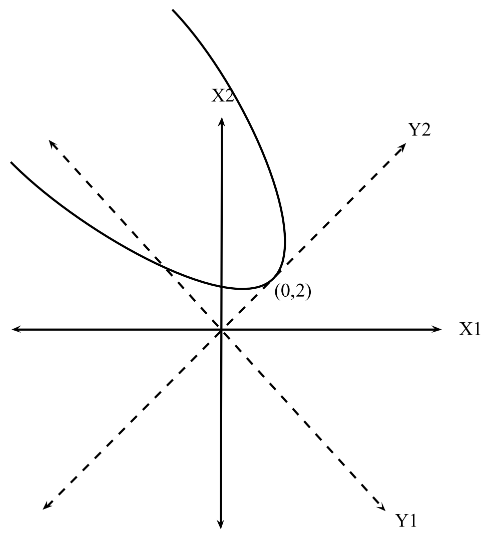
c) Trace la gráfica de la cónica en los nuevos ejes coordenados.

Respuesta:
Los nuevos ejes y_1 y y_2 tienen ecuación respecto a los ejes x_1 y x_2 dada por,

$$(x_1, x_2) = t \cdot (1, -1) \quad \rightarrow \quad \text{eje } y_1\text{: } x_2 = -x_1$$

$$(x_1, x_2) = t \cdot (1, 1) \quad \rightarrow \quad \text{eje } y_2\text{: } x_2 = x_1$$

La gráfica de la cónica es



4. La ecuación $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$ corresponde a una sección cónica.

   a) Determine una transformación lineal $T(x, y) = (z, w)$ tal que al efectuar este cambio de variables, la ecuación resultante esté en la forma canónica.

   Respuesta:
   La ecuación se escribe en la forma matricial como: $x^t Ax + l = 0$, donde

   $$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \qquad l = -36$$

   Diagonalizamos ortogonalmente a A para obtener el cambio de variable. Para eso calculamos primero los valores propios de A. El polinomio característico de A es;

   $$P_A(\lambda) = det\,(A - \lambda I_2) = det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

   Por tanto, $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 9$ son los dos valores propios de A.

   Subespacios propios:
   Para $\lambda = 4$; $V_{\lambda=4} = EspacioNulo\,(A - 4I_2)$

   $$A - 4I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{2f_1 + f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Tenemos que $V_{\lambda=4} = \left\{(2t, t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Entonces, una base para $V_{\lambda=4}$ es $\mathbb{B}_{\lambda=4} = \left\{(2, 1)^t\right\}$. Normalizamos al único vector de la base para encontrar una base ortonormal. Como, $\|(2, 1)\| = \sqrt{5}$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2,1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Entonces, $\mathbb{B}^*_{\lambda=4} = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^t\right\}$ es una base ortonormal de $V_{\lambda=4}$.

Para $\lambda = 9$; $V_{\lambda=9} = EspacioNulo\,(A - 9I_2)$

$$A - 9I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{-1}{4}f_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $V_{\lambda=9} = \left\{(-t, 2t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Entonces, una base para $V_{\lambda=9}$ es $\mathbb{B}_{\lambda=9} = \left\{(-1,2)^t\right\}$. Una base ortonormal se obtiene al normalizar al único vector de la base. Como, $\|(-1,2)\| = \sqrt{5}$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-1,2) = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Entonces, una base ortonormal de $V_{\lambda=9}$ es $\mathbb{B}^*_{\lambda=9} = \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^t\right\}$.

Una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios de A es:

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}^*_{\lambda=4} \cup \mathbb{B}^*_{\lambda=9} = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^t, \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^t\right\}$$

Tome C la matriz dada por;

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

que es una matriz ortogonal que diagonaliza ortogonalmente a A. El cambio de variable, $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = C^t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ elimina los términos cruzados de la forma cuadrática x^tAx de la ecuación matricial. Por lo tanto, la ecuación de la cónica equivalente es:

$$\begin{aligned} & 4z^2 + 9w^2 = 36 \\ \Rightarrow\ & \frac{z^2}{9} + \frac{w^2}{4} = 1 \\ \Rightarrow\ & \frac{z^2}{3^2} + \frac{w^2}{2^2} = 1 \end{aligned}$$

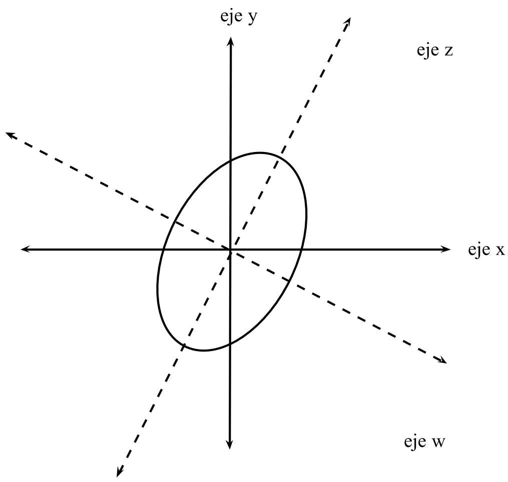
En los nuevos ejes, z y w, la ecuación en forma canónica corresponde a una elipse.

b) En un mismo gráfico, trace los ejes coordenados x y y, los ejes coordenados z y w y la sección cónica.

Respuesta:
Los nuevos ejes tienen ecuación respecto a los ejes x y y dada por,

$$(x, y) = t \cdot (2, 1) \quad \to \quad \text{eje z: } y = 2x$$
$$(x, y) = t \cdot (-1, 2) \quad \to \quad \text{eje w: } y = \frac{-1}{2}x$$

La gráfica de la cónica es



5. Considere la sección cónica correspondiente a la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 6$$

a) Haga un cambio de coordenadas, apropiado, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ para eliminar el término mixto (x_1, x_2). Determine explícitamente la matriz P.

Respuesta:
La ecuación de la cónica se escribe en la forma matricial como: $x^tAx + Bx + f = 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = (2, 2) \qquad f = -6$$

Diagonalizamos ortogonalmente a A para efectuar el cambio de variable. El polinomio característico de A es;

$$P_A(\lambda) = det\,(A - \lambda I_2) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda + 1)(3 - \lambda)$$

Por tanto, $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$ son los dos valores propios de A.

Los subespacios propios son:
Para $\lambda = -1$; $V_{\lambda=-1} = EspacioNulo\,(A + I_2)$

$$A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $V_{\lambda=-1} = \left\{(t,t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Entonces, una base para $V_{\lambda=-1}$ es $\mathbb{B}_{\lambda=-1} = \left\{(1,1)^t\right\}$.

Para encontrar una base ortonormal, basta con normalizar al único vector de la base. Como, $\|(1,1)\| = \sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Entonces, $\mathbb{B}^*_{\lambda=-1} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t\right\}$ es una base ortonormal de $V_{\lambda=-1}$.

Para $\lambda = 3$; $V_{\lambda=3} = \mathit{EspacioNulo}\,(A - 3I_2)$

$$A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $V_{\lambda=3} = \left\{(-t,t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Entonces, una base para $V_{\lambda=3}$ es $\mathbb{B}_{\lambda=3} = \left\{(-1,1)^t\right\}$. Una base ortonormal se obtiene al normalizar al único vector de la base. Como, $\|(-1,1)\| = \sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1,1) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Entonces, una base ortonormal de $V_{\lambda=3}$ es $\mathbb{B}^*_{\lambda=3} = \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t\right\}$.

Por lo tanto, una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios de A es:

$$\mathbb{B} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t, \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t\right\}$$

Entonces,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

que es una matriz ortogonal que diagonaliza ortogonalmente a A. El cambio de variable, $y = P^t x$, con $y = (y_1, y_2)^t$ y $x = (x_1, x_2)^t$ elimina los términos cruzados de la forma cuadrática $x^t A x$ de la ecuación matricial. Para los términos lineales,

$$(r,s) = B \cdot P = (2,2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = (2\sqrt{2}, 0)$$

Por lo tanto, la ecuación de la cónica equivalente es:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + rY_1 + sy_2 + f = 0 \\ \Rightarrow\quad & -1y_1^2 + 3y_2^2 + 2\sqrt{2}y_1 + 0y_2 = 6 \\ \Rightarrow\quad & -y_1^2 + 2\sqrt{2}y_1 + 3y_2^2 = 6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad -\left(y_1^2 - 2\sqrt{2}y_1 + 2\right) + 3y_2^2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad -\left(y_1^2 - \sqrt{2}\right)^2 + 3y_2^2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\left(y_1 - \sqrt{2}\right)^2}{2^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

es la ecuación de la cónica sin términos mixtos y sin términos lineales.

b) Identifique la sección cónica, trace, en un mismo dibujo, los ejes coordenados x_1, x_2, los ejes coordenados y_1, y_2 y la gráfica de la sección cónica.

Respuesta:
La cónica es una hipérbola, que se abre hacia el eje y_2. Está centrada en el punto $(\sqrt{2}, 0)$ en los ejes y_1, y_2 Tome, $z_1 = y_1 - \sqrt{2}$ y $z_2 = y_2$.

$$\Rightarrow \quad -\frac{z_1^2}{2^2} + \frac{z_2^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

es la ecuación en forma canónica en los ejes z_1, z_2.

El ángulo de rotación es el que se forma entre los ejes x_1 y z_1, y por lo tanto entre $e_1 = (1, 0)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ que son los vectores directores de esos ejes.

$$cos\theta = e_1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

La rotación es 45 grados el en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

Los nuevos ejes tienen ecuación respecto a los ejes x_1 y x_2 dada por,

$$(x_1, x_2) = t \cdot (1, 1) \quad \rightarrow \quad \text{eje } y_1\text{: } x_2 = x_1$$

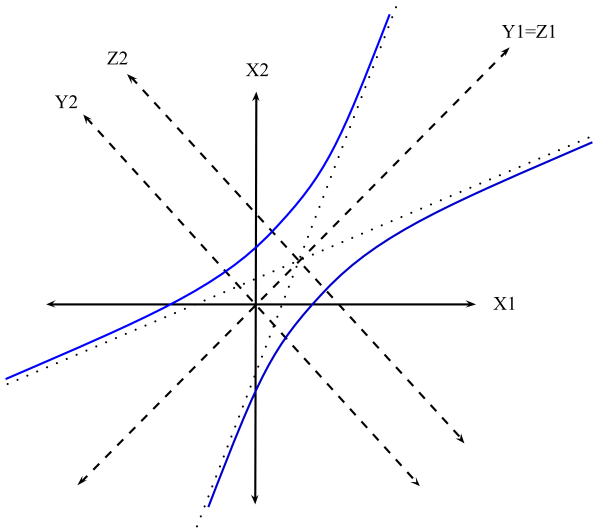
$$(x_1, x_2) = t \cdot (-1, 1) \quad \rightarrow \quad \text{eje } y_2\text{: } x_2 = -x_1$$

Las asíntotas siguen las ecuaciones,

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} y_1$$

$$y_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} y_1$$

La gráfica de la cónica es



6. Considere la sección cónica correspondiente a la ecuación

$$3x_1^2 - 3x_2^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{5}x_1 + 2\sqrt{5}x_2 = 15$$

a) Haga un cambio de coordenadas, apropiado, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ para eliminar el término mixto (x_1, x_2). Determine explícitamente la matriz P.

Respuesta:
La ecuación de la cónica se escribe en la forma matricial como: $x^tAx + Bx = f$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = (-4\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) \qquad f = 15$$

Diagonalizamos ortogonalmente a A para efectuar el cambio de variable. El polinomio característico de A es;

$$P_A(\lambda) = det\,(A - \lambda I_2) = det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ -4 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 5)$$

Por tanto, $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = 5$ son los dos valores propios de A.

Los subespacios propios son:
Para $\lambda = -5$; $V_{\lambda=-5} = EspacioNulo\,(A + 5I_2)$

$$A + 5I_2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $V_{\lambda=-5} = \left\{(t, 2t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Entonces, una base para $V_{\lambda=-5}$ es $\mathbb{B}_{\lambda=-5} = \left\{(1,2)^t\right\}$.

Una base ortonormal es $\mathbb{B}^*_{\lambda=-5} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^t\right\}$ es una base ortonormal de $V_{\lambda=-5}$.

Para $\lambda = 5$; $V_{\lambda=5} = EspacioNulo\,(A - 5I_2)$

$$A - 5I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $V_{\lambda=5} = \left\{(-2t, t)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$. Entonces, una base para $V_{\lambda=5}$ es $\mathbb{B}_{\lambda=5} = \left\{(-2, 1)^t\right\}$.
Una base ortonormal de $V_{\lambda=5}$ es $\mathbb{B}^*_{\lambda=5} = \left\{\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^t\right\}$.

Por lo tanto, una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios de A es:

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}^*_{\lambda=-5} \cup \mathbb{B}^*_{\lambda=5} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^t, \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^t\right\}$$

Tome

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

que es una matriz ortogonal que diagonaliza ortogonalmente a A. El cambio de variable, $y = P^t x$, con $y = (y_1, y_2)^t$ y $x = (x_1, x_2)^t$ elimina los términos cruzados de la forma cuadrática $x^t A x$ de la ecuación matricial. Para los términos lineales,

$$(r, s) = B \cdot P = \left(-4\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = (0, 10)$$

Por lo tanto, en los nuevos ejes, la ecuación de la cónica equivalente es:

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + rY_1 + sy_2 &= f \\ \Rightarrow \quad -5y_1^2 + 5y_2^2 + 0y_1 + 10y_2 &= 15 \\ \Rightarrow \quad -y_1^2 + y_2^2 + 2y_2 &= 3 \\ \Rightarrow \quad -y_1^2 + \left(y_2^2 + 1\right)^2 &= 4 \\ \Rightarrow \quad -\frac{(y_1)^2}{2^2} + \frac{(y_2 + 1)^2}{2^2} &= 1 \end{aligned}$$

es la ecuación de la cónica sin términos mixtos y sin términos lineales.

b) Identifique la sección cónica, trace, en un mismo dibujo, los ejes coordenados x_1, x_2, los ejes coordenados y_1, y_2 y la gráfica de la sección cónica.

Respuesta:
La cónica es una hipérbola, que se abre hacia el eje y_2. Está centrada en el punto $(0, -1)$ en los ejes y_1, y_2 Podemos centrarla en el origen, $z_1 = y_1$ y $z_2 = y_2 + 1$.

$$\Rightarrow \quad -\frac{z_1^2}{2^2} + \frac{z_2^2}{2^2} = 1$$

es la ecuación en forma canónica en los ejes z_1, z_2.

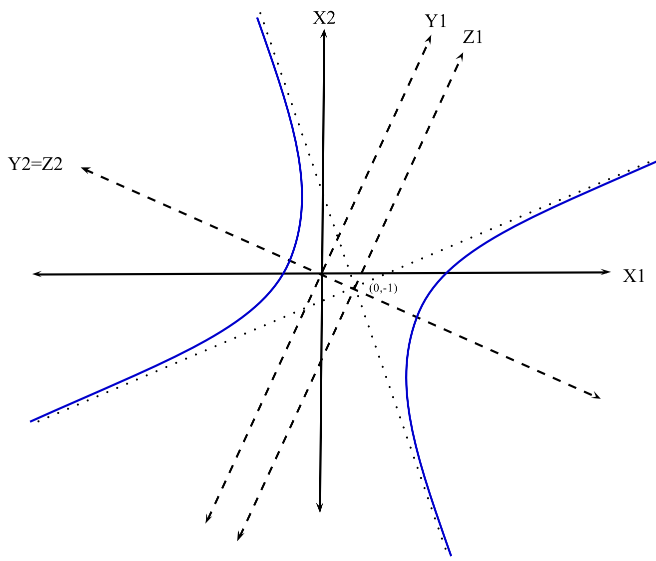
Los nuevos ejes tienen ecuación respecto a los ejes x_1 y x_2 dada por,

$$(x_1, x_2) = t \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \quad \rightarrow \quad \text{eje } y_1\text{: } x_2 = 2x_1$$
$$(x_1, x_2) = t \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \quad \rightarrow \quad \text{eje } y_2\text{: } x_2 = \frac{-1}{2}x_1$$

Las asíntotas siguen las ecuaciones,

$$y_2 = y_1$$
$$y_2 = -y_1$$

La gráfica de la cónica es



7. La ecuación

$$7x_1^2 + \sqrt{2}\sqrt{6}x_1x_2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3}x_1x_3 + 5x_2^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{6}x_2x_3 + 6x_3^2 = 2$$

corresponde a una superficie cuadrática.

a) Muestre que uno de los valores propios de la matriz de la forma cuadrática correspondiente es $\lambda = 10$. Determine los otros dos valores propios de la matriz.

Respuesta:
La ecuación se escribe en la forma matricial como: $x^tAx + Bx + l = 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 7 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2} & -\sqrt{2}\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2} & 5 & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} \\ -\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} & 6 \end{pmatrix} \qquad B = (0,0,0) \qquad l = -2$$

El polinomio característico de A es;

$$P_A(\lambda) = det\,(A - \lambda I_3) = det \begin{pmatrix} 7-\lambda & \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2} & -\sqrt{2}\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2} & 5-\lambda & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} \\ -\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} & 6-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-4)^2(\lambda-10)$$

Por tanto, $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 10$ son los dos valores propios de A.

b) Encuentre, explícitamente, una transformación lineal de modo que la forma cuadrática dada sea transformada en una forma cuadrática sin términos mixtos.

Respuesta:
Necesitamos hallar una base ortonormal de vectores propios de A.

Subespacios propios:
Para $\lambda = 4$; $V_{\lambda=4} = EspacioNulo\,(A - 4I_3)$

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 3 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2} & -\sqrt{2}\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} \\ -\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}f_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} \\ -\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\sqrt{2}\sqrt{3}f_1 + f_3]{-\frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2}f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6}x_2 + \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}x_3$$

Entonces, tomando $x_2 = \sqrt{2}\sqrt{6}s$ y $x_3 = \sqrt{2}\sqrt{3}t$ (esto para simplificar la expresión del subespacio propio como conjunto), tenemos que $V_{\lambda=4} = \left\{ \left(-2s + 2t,\ \sqrt{2}\sqrt{6}s,\ \sqrt{2}\sqrt{3}t\right)^t \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$.
Y como,

$$\left(-2s + 2t,\ \sqrt{2}\sqrt{6}s,\ \sqrt{2}\sqrt{3}t\right) = s\left(-2,\ \sqrt{2}\sqrt{6}, 0\right) + t\left(2, 0,\ \sqrt{2}\sqrt{3}\right)$$

Entonces, una base para $V_{\lambda=4}$ es: $\mathbb{B}_{\lambda=4} = \left\{ \left(-2,\ \sqrt{12}, 0\right)^t, \left(2, 0,\ \sqrt{6}\right)^t \right\}$.
Como buscamos una base ortonormal, aplicamos el algoritmo de Gram-Smith a la base $\mathbb{B}$.
Sean $v_1 = (-2,\ \sqrt{12}, 0)$, $v_2 = (2, 0,\ \sqrt{6})$.

$$a_1 = v_1 = (-2,\ \sqrt{12}, 0) \quad \Rightarrow \quad ||a_1||^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad ||a_1|| = 4$$

Como, $v_2 \cdot a_1 = (2, 0,\ \sqrt{6}) \cdot (-2,\ \sqrt{12}, 0) = -4$, entonces,

$$a_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot a_1}{||a_1||^2} \cdot a_1 = (2, 0,\ \sqrt{6}) - \frac{-4}{16}(-2,\ \sqrt{12}, 0) = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{12}}{4},\ \sqrt{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \|a_2\|^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \|a_2\| = 3$$

Entonces, una base ortogonal de $V_{\lambda=4}$, son b_1 y b_2 dados por,

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{4} \cdot (-2, \sqrt{12}, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$$b_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{12}}{4}, \sqrt{6}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

Entonces, $\mathbb{B}^*_{\lambda=4} = \{b_1, b_2\}$ es una base ortonormal de $V_{\lambda=4}$.

Para $\lambda = 10$; $V_{\lambda=10} = \mathit{EspacioNulo}\,(A - 10I_3)$

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2} & -\sqrt{2}\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2} & -5 & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} \\ -\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{-1}{3}f_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2} & -5 & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} \\ -\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\sqrt{2}\sqrt{3}f_1 + f_3]{-\frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{2}f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -4 & \frac{-2\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \frac{-2\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}f_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{-2\sqrt{3}\sqrt{6}}{3} & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{2\sqrt{3}\sqrt{6}}{3}f_2 + f_3]{-\frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6}f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, $V_{\lambda=10} = \left\{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}t, \frac{\sqrt{18}}{6}t, -t\right)^t \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$.

Y como,

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}t, \frac{\sqrt{18}}{6}t, -t\right) = t\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{18}}{6}, -1\right)$$

Entonces, una base para $V_{\lambda=10}$ es: $\mathbb{B}_{\lambda=10} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{18}}{6}, -1\right)$.

Normalizamos el vector de esta base para encontrar una base ortonormal; como

$$\left\|\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{18}}{6}, -1\right)\right\| = \sqrt{3}$$

Entonces, $\frac{1}{\left\|\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{18}}{6}, -1\right)\right\|} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{18}}{6}, -1\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

Por lo tanto, una base ortogonal de $V_{\lambda=10}$, es

$$\mathbb{B}^*_{\lambda=4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A es:

$$\mathbb{B} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)^t, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right)^t, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right)^t \right\}$$

Así, que si C es la matriz cuyas columnas son los vectores de la base anterior, es decir, si C es la matriz ortogonal dada por;

$$C = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

entonces, el cambio de variable $y = C^t x$, con $y \in \mathbb{R}^3$, se obtiene la forma equivalente sin términos mixtos para la ecuación de la forma cuadrática:

$$4y_1^2 + 4y_2^2 + 10y_3^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2 = 1$$

c) Identifique cuál es la superficie cuadrática en los nuevos ejes ordenados.

Respuesta:
Reacomodamos los términos de la ecuación para identificar cuál es la forma cuadrática en la posición canónica:

$$2y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y_3^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1$$

es un elipsoide en forma canónica en los nuevos ejes y_1, y_2, y_3.