EJERCICIOS 3

(1) Calcular los polinomios característico y mínimo de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Sea V el espacio vectorial de matrices 2×2 sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Se S el *operador de transposición*, es decir $S(A) := A^t$. Demostrar que S es un operador lineal de V y calcular los polinomios característico y mínimo de S. Exhibir una base de autovectores para el operador S.

(3) En esta pregunta $B \in M_n(\mathbb{F})$ es una *proyección* (es decir, $B^2 = B$).

(1) Comprobar que, si B es una proyección, la matriz $(I_n - B)$ es también una proyección. Demostrar que los autovalores distintos de B son $\{0, 1\}$, excepto si $B = O$ ó $B = I$.
(2) Verificar que $r(B) = \operatorname{tr} B$ cuando B es una proyección.[1]
(3) Verificar que $I + B$ es invertible y hallar $(I + B)^{-1}$.
(4) Hallar una proyección E que proyecte $\mathbb{R}^2$ sobre el subespacio generado por $(1, -1)$ paralelamente al subespacio generado por $(1, 2)$.

(4) Una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$, sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ cualquiera, se llama *semisimple* si su polinomio mínimo es un producto de *factores irreducibles distintos*. Comprobar que una matriz compleja (el caso $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) es semisimple si y sólo si es diagonalizable.

Exhibir una matriz $B \in M_4(\mathbb{R})$ que es semisimple pero no diagonalizable.

(5) Hallar una matriz real inversible P tal que $P^{-1}AP$ y $P^{-1}BP$ sean ambas diagonales, donde A y B son las matrices reales

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(6) Calcular los polinomios característico y mínimo de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Demostrar que la matriz es triangulable pero no diagonalizable; encontrar una matriz semejante de A que es triangular superior.

(7) Suponga que T es un operador de $\mathbb{R}^4$ con la matriz siguiente con respecto a la base estándar:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

(1) Describir la descomposición prima de A;
(2) Encontrar dos operatores lineales N y D donde N is nilpotente, D es diagonalizable, $DN = ND$ y $T = D + N$.

[1] Recuerden que $\operatorname{tr} B$ es *la traza* de B - es igual a la suma de las entradas diagonales de B. También, note que algunos autores usan la palabra *idempotente* en lugar de *proyección*.

(8) Suponga que $\mathbb{F}$ es un subcuerpo de $\mathbb{F}_1$. Suponga además que $A, B \in M(n, \mathbb{F})$ el conjunto de matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$. Demostrar que

$$A \sim B \text{ en } M(n, \mathbb{F}) \Longleftrightarrow A \sim B \text{ en } M(n, \mathbb{F}_1).$$

(Escribimos $A \sim B$ para significar que A *es semejante a* B.)

(9) Sea W un subespacio de un espacio vectorial V. Recuerde que

$$\mathrm{GL(V)} := \{\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{V}) \mid \mathrm{T} \text{ es invertible}\}.$$

Demostrar que

$$X_W := \{T \in \mathrm{GL(V)} \mid \mathrm{W} \text{ es invariante de T}\}.$$

es un subgrupo de GL(V).

(10) Sea V un espacio vectorial de dimensión $n < \infty$ sobre $\mathbb{F}$, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demostrar que T es triangulable si y sólo si hay subespacios $W_1, \ldots, W_{n-1}$ tal que

(1) $W_1, \ldots, W_{n-1}$ son invariantes de T;
(2) $\mathrm{dim(W_i)} = \mathrm{i}$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$;
(3) $W_1 < W_2 < \cdots W_{n-1}$.

(11) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $W \leq V$. Para $v \in V$, defina

$$v + W := \{v + w \mid w \in W\}.$$

y defina $V/W := \{v + W \mid v \in V\}$. Demostrar las afirmaciones siguientes.

(1) Si $(v_1 + W) \cap (v_2 + W) \neq \emptyset$, entonces $v_1 + W = v_2 + W$ y, además $v_1 = v_2 + w$ para algun $w \in W$.
(2) V/W es una partition de V.
(3) Las operaciones siguientes son bien-definidas:
   - **(suma)**
$$\begin{aligned} + : V/W \times V/W &\to V/W \\ (v_1 + W, v_2 + W) &\mapsto (v_1 + v_2) + W; \end{aligned}$$
   - **(multiplicación escalar)**
$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times V/W &\to V/W \\ (c, v + W) &\mapsto (cv) + W. \end{aligned}$$

   Demostrar, además, que $(V/W, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.
(4) Suponga que $\mathcal{B}$ es una base de W y, que Ω es un conjunto de vectores en V. Define
$$\Omega + W := \{v + W \mid v \in \Omega\} \subseteq V/W.$$
El conjunto $\mathcal{B} \cup \Omega$ es una base de V si y sólo si $\Omega + W$ es una base de V/W. Concluya que $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$.
(5) Suponga que $T \in \mathcal{L}(V)$ y W es invariante por T. La función
$$T^W : V/W \to V/W, \ v + W \mapsto T(v) + W$$
es un operador lineal bien-definido. Además, suponga que V es finitodimensional, que β_W es una base de W, y que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_W \cup \Omega$ es una base de V para algun conjunto Ω. Entonces
$$(T)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} (T_W)_{\mathcal{B}_W} & * \\ \hline 0 & (T^W)_{\mathcal{B}^W} \end{array}\right)$$
donde $\mathcal{B}^W := \Omega + W$.