EJERCICIOS 6

(1) Considere $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico. Encontrar el complemento ortogonal $M^\perp \subset \mathbb{R}^3$ del subespacio $M = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ generado por

$$\boldsymbol{x}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(2) Considere $\mathbb{R}^5$ con el producto interno canónico. Encontrar una base ortonormal para el subespacio $W = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \rangle$ de $\mathbb{R}^5$, donde

$$\boldsymbol{x}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_4 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(3) Considere $\mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico. Sea $W := \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores

$$\boldsymbol{x} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{z} := \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Encontrar un vector $w \in W$ tal que $\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$.

(4) Sea V el subespacio de polinomios $\mathbb{R}[x]$ con grado a lo más 3. Dótese V con el producto interno

$$\langle f(t), g(t) \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

(1) Hallar el complemento ortogonal del subespacio de polinomios escalares;
(2) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

(5) Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y sea $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base ortonormal de V. Demostrar que para vectores $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ cualesquiera de V

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_k \rangle \overline{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_k \rangle}.$$

(6) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^2$ generado por el vector $(3,4)$. Usando el producto interno canónico, sea E la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sobre W. Hallar

(1) la matriz de E en la base ordenada canónica;
(2) $W^{\perp}$;
(3) una base ortonormal en que E está representada por la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(7) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^2$ generado por el vector $(3,4)$ y sea E la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sobre W. Use el producto interno cuya forma cuadrática está definida por

$$\|(x_1,x_2)\|^2 = (x_1-x_2)^2 + 3x_2^2.$$

Hallar

(1) la matriz de E en la base ordenada canónica;
(2) $W^{\perp}$;
(3) una base ortonormal en que E está representada por la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(8) Considere la matriz siguiente:

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}.$$

(1) Probar que A tiene valores propios positivos.

Sea $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ el automorfismo de conjuaction compleja. Sea f la forma σ-sesquilineal tal que A es la matriz asociado a f con respecto al base ordenada canónica.

(2) Probar que f es un producto interno.
(3) Encuentre una base $\mathcal{B}$ tal que $[f]_{\mathcal{B}} = I$, la identidad.

(9) Sea $V = M(2,\mathbb{C})$ con producto interno

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{C},\ (A,B) \mapsto \operatorname{tr}(A^*B).$$

Sean

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ y } W = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ i & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2i & 3 \\ 1+i & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Encontrar la mejor aproximación de $\boldsymbol{v}$ por vectores de W.

(10) Este es un conjectura: *Sea V un espacio vectorial finitodimensional y sea $\mathcal{B}$ una base de V. Probar que hay un producto interno $V\times V \to \mathbb{F}$ tal que $\mathcal{B}$ es ortogonal. Probar que hay un producto interno $V\times V \to \mathbb{F}$ tal que $\mathcal{B}$ es ortonormal.*

Si el conjectura es verdadero, ¡demuéstrelo! Si no, ¡Deme un contraejemplo!