UNIVERSIDAD DE COSTA RICA ESCUELA DE MATEMATICA
Algebra lineal II Examen Parcial 2
II Semestre 2014 Nick Gill

Instrucciones: Puede usar cualquiera de las proposiciones o ejercicios vistos en clase. Tenga el cuidado de escribir muy claramente las proposiciones (o ejercicios) que usa.

1. Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ representado en la base ordenada canónica por:
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 5 & 4 & 5 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
   a) Hallar vectores no nulos $v_1, \ldots, v_r$ que satisfacen las condiciones del teorema de descomposición cíclica.
   b) Escribir la forma racional de A.
   c) Hallar una matriz real P inversible, tal que $P^{-1}AP$ esté en la forma racional.
   d) Escribir la forma de Jordan de A.

Answer. Podemos verificar que $f_A(\lambda) = (\lambda-4)^2(\lambda+6)$ y $p_A = (\lambda-4)(\lambda+6)$. Concluimos que los factores invariantes son
$$p_1 = (\lambda - 4)(\lambda + 6) \text{ and } p_2 = \lambda - 4.$$
Ahora calculamos los espacios propios de A:
- $V_4 = \langle (0,1,0), (1,0,-1) \rangle$
- $V_{-6} = \langle (1,0,1) \rangle$.

a) Para v_1 podemos tomar cualquier vector que no es un vector proprio, por ejemplo $v_1 = (1,0,0)$. En este case
$$W = \langle v_1, T(v_1) \rangle = (1,0,0), (-1,5,-5) \rangle$$
Ahora para v_2 podemos tomar cualquier vector propio asociado con 4 tal que $v_2 \notin W$, por ejemplo $v_2 = (0,1,0)$.

b) La forma racional es
$$\begin{bmatrix} 0 & 24 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

c) Podemos tomar
$$P = \begin{bmatrix} v_1 & T(v_1) & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) La forma Jordan es
$$\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno en V, y V^* el espacio dual de V. Para $w \in V$, se define:
$$\phi_w : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \langle v, w \rangle.$$
Y luego se define:
$$\phi : V \to V^*, w \mapsto \phi_w.$$
   a) Probar que la función ϕ está bien-definida y es lineal.
   b) Probar que si $\dim(V) < \infty$, entonces ϕ es un isomorfismo lineal.
   c) Dar un ejemplo de un espacio V de manera que ϕ no sea un isomorfismo lineal.

Answer.

a) Ya que el producto interno es lineal en la segunda variable, ϕ_w es lineal para todo $w \in V$ y ϕ es bien-definido.
Ya que el producto interno es lineal en la primera variable, ϕ es lineal.

b) Primero supóngase que $\phi_w = 0$. Entonces $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $v \in V$ y por lo tanto $w = 0$. Entonces ϕ es inyectiva.
Ahora podemos usar el hecho que $\dim(V) = \dim(V^*)$ y el resulto sigue. Alternativamente, sea $f \in V^* \setminus \{0\}$ y sea $K = \mathrm{Ker}(f)$, un subespacio de V de dimensión $n-1$. Sea w un elemento de $K^\perp$ y observe que, para $v \in V$, hay $k \in K$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que $v = k + cw$. Sea $d \in \mathbb{R}$ y tenemos que
$$\phi_{dw}(v) = \phi(dw, k + cw) = \phi(dw, k) + cd\phi(w, w) = \langle w, k \rangle + cd\langle w, w \rangle = cd\|w\|^2.$$
$$f(v) = f(k + cw) = f(k) + cf(w) = cf(w).$$
Escogemos $d = f(w)/\|w\|^2$ y hemos terminado.

c) Sea
$$V = \{(a_1, a_2, \ldots,) \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ y un número finito de entradas son no-ceros}\}$$
$$f : V \to \mathbb{R}, (a_1, a_2, \ldots,) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$
Afirmo que $f \neq \phi_w$ para todo $w \in V$. Para ver este, sea e_i el elemento de V con i-ésima entrada igual a 1, los otros iguales a 0. Observe que $f(e_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Por otra parte observe que $\phi_w(e_i) \neq 0$ si y solo si la i-ésima entrada de w no es igual a 0. Ya que $w \in V$, concluimos que $\phi_w(e_i) = 1$ para un número finito de los vectores e_i. Entonces $f \neq \phi_w$.

3. Sean V un espacio finito-dimensional sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, un automorfismo σ de $\mathbb{F}$ y Ω el conjunto de las formas σ-sesquilineales. Defina una relación $\sim$ sobre Ω como sigue: para $f, g \in \Omega$, escriba $f \sim g$ si hay bases ordenadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tales que $[f]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{C}}$. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Answer.

Reflexiva: Es claro que $f \sim F$ ya que $[f]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}$ para toda base $\mathcal{B}$ de V.

Simétrica. Si $f \sim g$, entonces hay bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tal que $[f]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{C}}$. Por lo tanto $[g]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}}$ y temos $g \sim f$.

Transitiva. Supóngase que $f \sim g$ y $g \sim h$, entonces hay bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ tal que $[f]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{C}}$ y $[g]_{\mathcal{D}} = [h]_{\mathcal{E}}$.

Sea P la matriz de cambio de base $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$. En particular $[Pv]_{\mathcal{C}} = [v]_{\mathcal{D}}$ para todo $v \in V$. Sea $\mathcal{F}$ la base tal que P es la matriz de cambio de base $\mathcal{B} \to \mathcal{F}$. Ahora

$$[f]_{\mathcal{F}} = P^*[f]_{\mathcal{B}}P = P^*[g]_{\mathcal{C}}P = [g]_{\mathcal{D}} = [h]_{\mathcal{E}}$$

y concluimos que $f \sim h$.

4. Considere $\mathbb{C}^4$ con el producto interno canónico. Sea $W := \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ el subespacio de $\mathbb{C}^4$ generado por los vectores:

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1-2i \\ 1+4i \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, \qquad v_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{25}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

   a) Use el procedimiento de Gram-Schmidt para escribir una base ortonormal de W.
   b) Encontrar un vector $w \in W$, no cero, tal que $\langle w, v_1\rangle = \langle w, v_2\rangle = 0$.

Answer. Observe que $\|v_1\| = 2$, entonces, define

$$u_1 = \frac{1}{2}v_1 = \frac{1}{2}(1+i, 1, 1, 0).$$

Ahora $\langle v_2, u_1\rangle = 2$, entonces

$$\begin{aligned} u_2^* &= v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 \\ &= (2, 1-2i, 1+4i, \sqrt{3}) - (1+i, 1, 1, 0) \\ &= (1-i, -2i, 4i, \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Ahora $\|u_2^*\| = 5$, entonces

$$u_2 = \frac{1}{5}u_2^* = \frac{1}{5}(1-i, -2i, 4i, \sqrt{3}).$$

Al final $\langle v_3, u_1\rangle = 0$ y $\langle v_3, u_2\rangle = 5$, entonces

$$\begin{aligned} u_3^* &= v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2 \\ &= (0, 0, 0, 25/\sqrt{3}) - (1-i, -2i, 4i, \sqrt{3}) \\ &= (-1+i, 2i, -4i, 22/\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Ahora $\|u_3^*\| = \sqrt{550/3}$, entonces

$$u_3 = \sqrt{\frac{3}{550}}u_3^* = \sqrt{\frac{3}{550}}(-1+i, 2i, -4i, \frac{22}{\sqrt{3}}).$$

Podemos tomar nuestra base normal igual a $\{u_1, u_2, u_3\}$ y el vector $w = u_3$.

5. Sea $\mathcal{E}$ la base ordenada canónica de $V = \mathbb{R}^3$. Defina la función:

$$f\colon V \times V \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \big([w]_{\mathcal{E}}\big)^t \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot [v]_{\mathcal{E}}.$$

   a) Probar que f es un producto interno.
   b) Sea $W = \langle (1, 1, 0)\rangle$. Hallar el complemento ortogonal de W en V, con respecto al producto interno f.
   c) Sea $E_W\colon V \to W$ la proyección ortogonal de V sobre W, con respecto al producto interno f. Escribir la matriz $(E_W)_{\mathcal{E}}$.

Answer.

a) Sea $v_1, v_2, w \in V$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y sea $A = [f]_{\mathcal{E}}$. Entonces

$$\begin{aligned} f(a_1v_1 + a_2v_2, w) &= [a_1v_1 + a_2v_2]_{\mathcal{E}} \cdot A \cdot [w]_{\mathcal{E}} \\ &= (a_1[v_1]_{\mathcal{E}} + a_2[v_2]_{\mathcal{E}}) \cdot A \cdot [w]_{\mathcal{E}} \\ &= a_1([v_1]_{\mathcal{E}} \cdot A \cdot [w]_{\mathcal{E}}) + a_2([v_2]_{\mathcal{E}} \cdot A \cdot [w]_{\mathcal{E}}) \\ &= a_1 f(v_1, w) + a_2 f(v_2, w). \end{aligned}$$

Entonces f es lineal en la primera variable. Similarmente f es lineal en la segunda variable, entonces es una forma bilineal.

Ahora observa que A es simétrica, entonces $f(v, w) = f(w, v)$.

Por fin, sea $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ y observe que

$$\begin{aligned} f(v, v) &= \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= 2a^2 - ab - ab + 2b^2 - bc - bc + 2c^2 \\ &= a^2 + (a-b)^2 + b^2 + (b-c)^2 + c^2 > 0 \end{aligned}$$

siempre que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

b) Un elemento $v = (x, y, z) \in W^{\perp}$ si y solo si

$$f((1,1,0), v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = 0$$

Es decir que v es en el conjunto solución de la ecuación

$$x + y - z = 0.$$

Ahora este conjunto es el subespacio

$$\langle (1,0,1), (-1,1,0) \rangle.$$

c) Sea $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (1,0,1), (-1,1,0\}$. Entonces es claro que

$$[E_W]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora sea

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

la matriz de cambio de base $\mathcal{E} \to \mathcal{B}$. Entonces

$$\begin{aligned} [E_W]_{\mathcal{E}} &= P \cdot [E_W]_{\mathcal{B}} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6. Sea $A \in M(6, \mathbb{R})$ con polinomio característico igual a $(\lambda^2+1)(\lambda-1)^4$.
   a) Escribir las formas racionales posibles para A.
   b) ¿Para cuales de estas formas (racionales) existe una matriz (inversible) $P \in M(6, \mathbb{C})$ tal que $P^{-1}AP$ es diagonal?

Answer. Escribimos los factores invariantes posibles con la forma racional correspondiente.

$p_1 = p_A$	p_2	p_3	p_4	Forma racional
$(\lambda^2+1)(\lambda-1)^4$				$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&-1\\ 1&0&0&0&0&4\\ 0&1&0&0&0&-7\\ 0&0&1&0&0&8\\ 0&0&0&1&0&-7\\ 0&0&0&0&1&4 \end{bmatrix}$
$(\lambda^2+1)(\lambda-1)^3$	$\lambda-1$			$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&-3&0\\ 0&1&0&0&4&0\\ 0&0&1&0&-4&0\\ 0&0&0&1&3&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$
$(\lambda^2+1)(\lambda-1)^2$	$(\lambda-1)^2$			$\begin{bmatrix} 0&0&0&-1&0&0\\ 1&0&0&2&0&0\\ 0&1&0&-2&0&0\\ 0&0&1&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&1&2 \end{bmatrix}$
$(\lambda^2+1)(\lambda-1)^2$	$\lambda-1$	$\lambda-1$		$\begin{bmatrix} 0&0&0&-1&0&0\\ 1&0&0&2&0&0\\ 0&1&0&-2&0&0\\ 0&0&1&2&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$
$(\lambda^2+1)(\lambda-1)$	$\lambda-1$	$\lambda-1$	$\lambda-1$	$\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 1&0&-1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$

La forma final es la forma única que es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$ (ya que es la forma única tal que la polinomio minimal es un producto de factores lineales distintos sobre $\mathbb{C}$).